全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

Broadview 博文视点 财富管理

WILEY

精辟的见解，专业的建议，真实的案例

波动率曲面

期权波动率建模实战指南

[美] Jim Gatheral 著

陈思 译

The Volatility Surface

A Practitioner's Guide

波动率曲面建模于实际中的应用

衍生品定价领域全新理论，期权市场交易实践

中国工信出版集团

電子工業出版社

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

内容简介

本书可以帮助读者快速了解期权定价领域最新的理论，熟悉权益类衍生品市场的历史和交易实践。这是一本写给实践工作者的实战性书籍，本书的前半部分侧重于构建理论架构，后半部分则面向实际应用：

● 包含了Heston模型的详细推导过程，解释了很多流行的模型，如：SVJ，SVJJ，SABR和CreditGrades；

● 讨论了多种类型的奇异期权的特征，从简单的障碍期权到特别奇异的拿破仑；

● 通过对最新研究成果的完美呈现，详细介绍了波动率衍生品；

● 通过对真实交易的到期债券的案例研究，检验了奇异凯利合约的表现。

The Volatility Surface:A Practitioner′s Guide, 978-0471792512, Jim

Copyright © 2006 by Jim Gatheral. All rights reserved.

This translation published under license.

No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of John Wiley&Sons, Inc. Copies of this book sold without a Wiley sticker on the back cover are unauthorized and illegal.

本书简体中文字版专有翻译出版权由美国John Wiley&Sons, Inc.公司授予电子工业出版社。未经许可，不得以任何手段和形式复制或抄袭本书内容。

本书封底贴有John Wiley&Sons, Inc.防伪标签，无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字：01-2014-5124

图书在版编目（CIP）数据

波动率曲面：期权波动率建模实战指南/（美）吉姆·盖斯勒尔（Jim Gatheral）著；陈思译. —北京：电子工业出版社，2017.10

（Broadview财富管理）

书名原文：The Volatility Surface:A Practitioner’s Guide

ISBN 978-7-121-32639-4

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

中文版序言

对风险的认识和管理贯穿整个人类金融发展史。无论风险管理的工具和手段有多么复杂和精细，风险管理的方法本质上都归为风险的分散和转移两种方式。投资组合理论是风险分散的典型实践应用，而期权的出现则为风险转移提供了条件和工具。在300多年前的欧洲，作为风险转移的有效机制，海运保险和财产保险的产生大大促进了国际贸易和工业生产，进而推动经济社会的发展；期权市场的出现则为全球金融市场的风险转移提供了有序、高效而透明的市场机制，也进一步推动了全球金融市场的演化和进步。从全球金融市场发展的普遍经验来看，一个稳定而富有弹性的金融市场必须以高效的风险定价和转移机制为基础，而期权市场正是这个必备基础的核心要件。

我国的资本市场经过二十多年的发展，已经取得了显著的成果，目前股票市场规模已经仅次于美国，位列全球第二。然而，我国金融衍生品市场的发展才刚刚起步，不仅与成熟市场国家有较大的差距，在发展节奏上也落后于印度、巴西、南非、俄罗斯等新兴市场国家。和国外市场一样，我国建设完善稳定的资本市场也离不开高效的金融衍生品市场。期权必然是我国金融衍生品市场发展的下一个重点。

作为非线性特征的产品，期权和期货、股票等线性产品最明显的区别在于期权比线性产品增加了波动率维度。期货等线性产品是在价格和时间的二维平面里面交易的；而期权多出的波动率维度把我们带入了神奇的三维立体空间。了解期权的人都知道决定期权价格最重要的因素是对标的资产波动率的预期。正是这个波动率维度，让我们摆脱了二维平面的束缚，增加了交易的自由度和选择性，但同时也增加了定价的复杂性。BS（Black-Scholes）模型为我们提供了非常优雅和简单的期权定价解决方案，很多金融界的从业人员把 BS 模型奉为“金融界的牛顿万有引力定律”。但是，BS模型中有很多条件假设在现实世界中是无法成立的。例如，1987年股灾发生后，很多业界专家发现了期权隐含波动率的“微笑”曲线，认识到波动率并不是一个恒定的值。很多充满好奇心并且勇于探索的学术界和从业人员在不断挑战 BS 模型的有效性，并且在强大的数学工具帮助下探寻更加精细化的数学模型来定价期权。这些模型摆脱了 BS 模型有关波动率在一定期限内是不变的和不同行权价格期权的波动率是相同的等与现实世界不符的前提假设，采用波动率曲面的模型来优化和更加准确地为期权定价。这些波动率曲面的模型成功地把波动率微笑和波动率本身的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

随机性等特征刻画出来，计算的结果更加接近现实世界中期权的交易价格。

期权把交易的维度从价格方向扩展到波动率维度（从泰勒公式的一阶到二阶），交易的复杂性大大提升，对复杂数学工具的依赖性也不断提升。行之有效的期权定价模型是期权交易的基础，而波动率曲面模型则是期权定价的核心。波动率曲面模型是通往期权定价之门的钥匙，各类期权市场的参与者，包括做市商、套保投资者、套利交易者、投机者都需要有效的波动率曲面模型来提供定价参考。没有这把钥匙参与期权交易无异于蒙着眼睛在车流繁忙的大街上行走，行程将会危机四伏。从1973年BS模型诞生到现在学术界对波动率模型和波动率曲面进行了持续不断的探索，产生了大量的研究成果，但是由于在计算和参数设置上较为复杂，这些成果在业界的运用受到较大限制。在业界，由于波动率模型的选择和实施是一个机构的核心竞争力，很少有专家把波动率模型的方法和细节公布于众，因此，有关探讨在实际交易中行之有效的波动率模型教材并不多见。2006年，作为研究波动率模型的权威学者和业界专家，Jim Gatheral博士把他在纽约大学教授波动率曲面模型课程的讲义编成书出版，学界和业界就有了一本非常贴近实践运用的优秀教材。由于Jim长期在投行自营交易一线从事研究和交易工作，他的视角和对模型的探索成果对参与市场的从业人员非常有参考价值。

本书的中文版译者陈思博士在读博期间就把研究方向集中于波动率曲面这个很有挑战性的课题，她敏锐地发现这本贴近实践的教材对于我们国家刚刚起步的期权市场存在巨大的参考价值，并且花费了大量心血把这本书翻译成中文带给国内的读者。希望这本书的中译版能够给中国学术界和业界人士提供一个急需的学习资料，拓宽视野和启迪思维，推动我们国内学术与业界在期权定价方面的深入研究和探讨，促进国内期权市场的健康平稳发展。

最后，我想提醒读者一点，期权交易是科学也是艺术，定价模型只能解决期权定价中的一部分带有科学属性的问题。与其他市场一样，期权市场的价格是由所有市场参与者共同作用和相互作用形成的，全面深入理解期权的定价还需要仔细考虑市场规则、投资者结构、投资者行为和市场情绪等重要因素，而有效的波动率模型仅仅是提供了一个理解和定价期权市场的标尺，这是一个解决问题的工具和开始，而不是解决方案。在实际运用中，也并不是越复杂和精细化的定价模型越好，经验丰富的期权交易员总是在模型的精细化和便利性两个方面做好平衡。同样地，我希望这本书是你进一步深入探索期权定价的一个良好起点，从这里出发开启探寻定价期权金钥匙之路，尽

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

管你会发现旅程的终点似乎永远都遥不可及，但是会感受到探索之旅的过程趣味无穷、美丽至极。欢迎你来到奇妙的期权世界！

王琦

2017年7月

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

引言

（一）

吉姆·盖斯勒尔（Jim Gatheral）在纽约大学柯朗研究所开了6次关于波动率建模的课程，慢慢形成了这本讲义。吉姆2000年写下这些公式，经过了6年的修改终于形成了2006年春天的这个版本，我见证了整个过程，并且深深地被这本书吸引了。就像酿酒一样，要反复提炼才能酿出好酒。这本书整整修改了7次，经过一次又一次的修改，它变得更简洁明了、思路更清晰。这本书的绝妙之处在于它的内容恰到好处，既实现了最大程度的简洁，又涵盖了所有关键的知识点，没有过于冗长也没有过于片面，切中要点却没有过分地炫耀自己的专业技术。

这门课开课之后迅速走红。第二年，学校的工作人员就开始抱怨了，因为有太多的业界工作者来免费旁听，以至于交学费的学生们都没有位置坐。到了第三年、第四年，这本书就开始在老师之间传阅，变成了一本标准教程。吉姆对随机波动率和局部波动率的处理方式已经成为一种标准。

我和吉姆商量好去听对方的课，比起普通的听课者，我们更像是对方的合作讲师。我们经常质疑对方，以确保每个知识点都没有争议，在其他参加这个课程的教员看来，我们对每个细节都吹毛求疵，好像是故意来砸对方场子的。有的时候我们会因为讨论问题过于激烈而变得不理智，学生们很快就从吉姆那里知道了我喜欢白酒配红肉的嗜好，我也不甘示弱，嘲笑他说法语的时候会有很奇怪的苏格兰口音。后来，我在其他学校开了这门课，那时我才真正意识到这门课的价值，所以我又回去听他讲了很多次。

（二）

吉姆和其他量化分析师的不同之处在于，对于大多数量化分析师来说，模型在一定的限制条件下提供了对资产价格动态过程的一种表示。出于某种原因，商学院的教授们倾向于认为模型是对现实的一种自上而下的统计假设。这种观点在那些没有实际的风险管理经验的人中也很流行。

但是，吉姆不一样，他既做过量化分析师，又做过交易员。在他看来，随机波动率模型的作用不应该像大多数人那样理解。这些模型并不是对现实世界的、自上而下的、教条式的表示，而是保证所有产品都在一个统一的框架下被合理定价的工具，也就是要满足无套利的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

定价规则。任何机构或个人都不能通过用其他金融工具复制某个金融工具而获利。举个例子，一个模型应该保证欧式看涨期权和欧式数字期权定价的一致性。一个好的模型应该满足无套利原理，同时又没有过多的限制条件。

在他的启发下，我意识到了下面的问题。听他的课到大概第五次的时候，我意识到这个世界需要曼德尔布罗幂律或者可扩展性分布，我发现吉姆用来构建波动率曲面的模型和这些分布是一致的。如何做到这一点呢？你只需要选定某种特殊的方式来提升虚值期权的波动率，波动率曲面就和扩展的幂律保持一致了。

吉姆·盖斯勒尔是个天生的数学家，他非常有天分。听他的课时，你会非常明显地感觉到，他可以毫不费力、自然而然地流露出技艺的精湛，意大利语中，这种状态叫“sprezzatura”。看了这本书，我的这种感触更深了，因为这本书是用LaTeX排版过的，比看他糟糕的板书更加清楚。

——纳西姆·尼古拉斯·塔勒布[1]

---

[1]Nassim Nicholas Taleb，Dynamic Hedging and Fooled by Randomness的作者。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

前言

自从Black-Scholes期权定价公式出现之后，对隐含波动率的研究就成了学术界和业界的研究热点。大家都知道，Black-Scholes模型算出的期权价格往往和实际有偏差，因为模型假设违背市场实际情况。Black-Scholes模型假设隐含波动率（将期权市场价格带回 Black-Scholes 公式倒推出的波动率）是一个常数，实际上隐含波动率是和期权的到期时间、执行价格相关的，所有这些隐含波动率的集合被称为波动率曲面。

这本书的重点在于对波动率曲面的理解，也就是：为什么期权是这样定价的，以及股票收益率是如何影响期权的定价的。

人们一贯认为定价（Pricing）比对冲重要，可是实际上对冲（Hedging）和复制（Replication）才是实现产品收益的过程。从某种程度上讲，定价确实是关键，因为对冲过程只影响产品收益的分布情况，而不影响产品的期望价值。一般情况下，再精妙的对冲也无法弥补定价错误。这是因为，从某种角度来看，对冲是比定价更复杂、更需要技术含量的事情。

这本书介绍了很多模型，不同的模型假设了不同的动态过程，对这些动态过程的检验是帮助读者建立建模直觉的关键。这本书的目的并不是单纯地罗列结果，而是教会读者如何进行思考以及如何解决各个领域中的实际问题。读完这本书，读者会了解大量最新的期权定价理论，也能够体会出股票衍生品市场在历史上、在实践中到底是如何交易的。这本书的内容与衍生品的交易、营销、定价、对冲和风险管理息息相关，读者若能有幸理解其中真谛，定会受益匪浅。

正如书名所示，这本书是一个经验丰富的业界工作者写给业界工作者的指南。这本书还给出了Heston模型的详细推导，同时解释了其他一些非常著名的模型，例如：SVJ模型、SVJJ模型、SABR模型和CreditGrades模型。读者还会了解到奇异期权的知识，从最简单的障碍期权（Barrier Option）到非常复杂的拿破仑（Napoleon）奇异期权。这本书的部分内容讲述了如何用未来可能的波动情况的加权平均来表示隐含波动率（Implied Volatility）。这种表示隐含波动率的方式可以帮助大家理解不同模型假设对波动率曲面动态（Dynamics of Volatility Surfaces）及波动率曲面形状的影响，其中波动率曲面动态是量化分析师和交易员都很感兴趣的问题。书中还介绍和解释了很

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

多实践中的结论与技巧。最后一章详细地介绍了时下非常热门的波动率衍生品（Volatility Derivatives）。

这本书对学术界也非常有用，它是现阶段研究波动率建模的指南，同时让学者们了解到他们的理论在实际中到底是如何应用的。相比于学术界工作者，业界工作者的优势是：他们不需要担心他们的成果是否被他人关注和认可。这本书从一个业界工作者的角度讲述了在实践当中什么是被关注的、有用的。

总之，我希望大家都能从这本书中学到有用的东西，无论是学术界工作者还是业界工作者。

我在纽约大学柯朗研究中心开了一门波动率建模的课程，选修过这门课程的人一定对这本书的目录非常熟悉。我希望即使是一直在听我的这门课程的人也能从这本书中得到有价值的东西。在这本书中我又补充了一些资料，插入了一些图解和注释，还加了索引。

这本书的前身是一门金融数学三个学期的硕士项目的课程讲义，这门课程是针对最后一个学期的硕士在读学生的。这个项目的学生本科时的专业一般都和量化相关，比如：数学、物理、工程学。有一些学生已经在业界工作了，他们参加这个项目的学习是为了加深对工作上需要用到的数理知识的理解；另一些学生来学习必要的数学和金融背景知识，为后面进入金融领域工作做准备。到了三个学期，学生们已经学过了金融数学、计算科学、基本的概率理论和随机过程。

由此可见，要充分地理解这本书的内容，读者需要掌握一定的期权定价理论和金融市场知识，这些知识可以参考Wilmott （2000）。关于数学、基础的概率理论和随机积分的知识，可以参考Neftci（2000）或者Mikosch （1999）。然而，我更希望即使不懂公式的推导过程，读者在信任这些公式的可靠性的情况下，也能够理解我对模型的解释。

这本书的内容安排

这本书的前半部分，从第1章到第5章，重点介绍了理论框架的建立。后面的章节侧重于实际应用。但是这种分界并不明显，前面几章也有实际应用的东西，后面的章节也会涉及理论构建的内容。这反映出，理论与实践是分不开的，一个业界工作的量化分析师既要懂理论，又要知道如何在实践中运用这些理论。

第1章，解释了随机波动率（Stochastic Volatility）和局部波动率（Local Volatility），证明了局部方差（Local Variance）是瞬时方差（Instantaneous Variance）在风险中性（Risk-Neutral）测度下的期望，这个结论在后面的章节中会反复用到。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第2章，介绍了时至今日仍然非常受欢迎的Heston模型，并且推导了Heston模型下的欧式期权定价公式。除此之外，还讲了如何模拟（Simulate）Heston模型。

第3章，给出了隐含波动率关于局部波动率的表达式，这个表达式非常有用，对建立波动率建模的直觉很重要。结合这个表达式，我们推导出了Heston模型生成的隐含波动率曲面的一些性质，并且将Heston模型生成的隐含波动率曲面与实际中观察的标准普尔500指数期权隐含波动率曲面进行了对比。通过对比，我们得到的结论是：随机波动率模型并不能完全地刻画市场实际情况。

第4章，给定了Heston模型中的几个参数，选定ρ=-1的情况，这种情况最开始被Heson和Nandi研究过。我们证明了，在这种情况下，第3章中得到的关于隐含波动率的近似公式表现得非常好。结论是，我们可以通过合理地设定局部波动率和随机波动率模型的参数，使得它们得到的欧式期权价格是一样的。为了说明模型对不同假设条件的依赖性，我们在后面的章节中会重复地使用这些参数。

第5章，探讨了如何对跳（Jumps）进行建模。开始，我们讨论了为什么要在模型中加入跳。随后，我们引入特征函数（Characteristic Function）技术，并介绍了如何用这种技术计算带跳的模型的隐含波动率。最后，我们得到的结论是，SVJ模型（股票价格动态过程中带跳的随机波动率模型）产生的波动率曲面能描述市场实际波动率曲面的大部分特征。在这一章中，我们主要描述了跳是如何影响波动率曲面的形态的。

第6章，把关于跳的结果应用到Merton的跳违约模型（Jump-to-Ruin Model of Default）上。另外，我们还介绍了CreditGrades模型，顺便提及了资本结构套利，也开始涉及实际交易中的一些不理想的情况，解释了做市商是如何产生巨大亏损的。

第7章，检验了波动率曲面的渐进性质（Asymptotic Properties），说明了所有随机波动率和带跳的随机波动率模型生成的波动率曲面的形状基本相同。

第8章，展示了如何从波动率曲面的时间序列数据中提取出波动率的动态，并且说明了为什么局部波动率模型产生的波动率曲面动态（Dynamics of the Volatility Surfaces）与实际情况背离。

第9章，我们介绍了各种障碍期权（Barrier Option），并且通过研究两种简单的极限情况帮读者建立直观的感觉。我们用随机波动率模型和局部波动率模型计算了障碍期权的相对价值，并验证了我们的直观感觉。这一章还介绍和运用了反射原理（Reflection

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

Principle）、准静态对冲（Quasi-Static Hedging）的概念和平价公式（Put-Call Symmetry）。

第10章，仔细地研究了三个已经到期的凯利（Cliquet）奇异期权的的交易费用，这样我们就可以进一步探索定价和事后的表现了。我们特别研究了局部封顶（Locally Capped）和全局封底（Globally Floored）凯利，反转凯利（Reverse Cliquet）和拿破仑（Napoleon）。经常关注财经新闻的人肯定知道，这些产品让一些经销商非常头疼。

第11章，是全书篇幅最长的一章，这一章重点介绍了如何对标的（Underlying）为二次变差（Quadratic Variation）的产品进行定价和对冲。在这一章中，我们呈现了金融数学领域最优雅和强大的结果，并从某些角度解释了为什么波动率衍生品市场（Volatility Derivatives）会具有惊人的活跃度和流动性。

轻松注册成为博文视点社区用户（www.broadview.com.cn），扫码直达本书页面。

● **提交勘误**：您对书中内容的修改意见可在 提交勘误 处提交，若被采纳，将获赠博文视点社区积分（在您购买电子书时，积分可用来抵扣相应金额）。

● **交流互动**：在页面下方 读者评论 处留下您的疑问或观点，与我们和其他读者一同学习交流。

页面入口：http://www.broadview.com.cn/32639

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

鸣谢

我要感谢的人比我在这里列出的还要多很多，这么多年来他们给予我很多帮助、支持和鼓励。首先，我要感谢我之前的同事们，特别是在美林做量化分析师的同事。其次，作为一个业界工作者，我还要感谢那些公开他们研究成果的学术界工作者和业界工作者，他们的研究成果让我获益匪浅。除了这本书中引用的参考文献，还有很多人在这个领域做了非常大的贡献，并且对我产生了很大的影响。对于那些我没有明确地引用你们成果的人，我也非常感谢你们。

下面，我要特别感谢那些对这本书的撰写产生了直接帮助的人：纳西姆·塔勒布，是我在柯朗研究所的合作讲师，我和他之间的讨论帮我重塑了我的演讲内容。彼得·卡尔，布鲁诺·杜派和马可·阿韦亚内达给了我很多有用的建议。感谢尼尔·可莱丝分享了一些好的写作技巧，并且介绍我来柯朗研究所讲课。我还要感谢彼得·弗雷兹，他是我曾经的助教，现在在剑桥统计实验室做讲师，彼得非常仔细地看了我的讲义，经常给我一些修正和改进的建议。如果没有他，估计就不会有这本书。还要感谢他和布鲁诺·杜派校阅了这本书最新的手稿，并给了我很多有价值的建议。还要感谢Wiley出版社的编辑帕梅拉·范·吉森，珍妮弗·麦克顿和托德·特德斯科。如果这本书有什么纰漏，一定是我的原因。

最后要感谢由纪子和绫子对我的包容。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

目录

中文版序言
引言
前言
鸣谢
第1章 随机波动率和局部波动率
1.1 随机波动率
1.2 局部波动率
第2章 风险均衡原理简介
2.1 动态过程
2.2 Heston模型下的欧式期权定价公式
2.3 Heston模型下特征函数的推导
2.4 Heston模型的仿真模拟
第3章 隐含波动率曲面
3.1 从隐含波动率到局部波动率
3.2 Heston模型的局部波动率
3.3 Heston模型的隐含波动率
3.4 标准普尔500指数期权的隐含波动率曲面
第4章 Heston-Nandi模型
4.1 Heston-Nandi模型的局部方差
4.2 数值例子
4.3 结果讨论
第5章 引入跳过程
5.1 为什么需要引入“跳”
5.2 跳扩散（Jump Diffusion）
5.3 特征函数方法
5.4 随机波动率加跳
第6章 违约风险建模
6.1 Merton的违约模型
6.2 资产结构套利
6.3 跳灭模型中的局部和隐含波动率

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

6.4 违约风险对期权价格的影响
6.5 CreditGrades模型
第7章 波动率曲面渐近
7.1 剩余到期时间较短的情况
7.2 Medvedev-Scaillet的结果
7.3 加入跳
7.4 剩余到期时间较长的情况：Fouque、Papanicolaou和Sircar
7.5 极小的波动率的波动率：Lewis
7.6 执行价的极值：Roger Lee
7.7 渐近性总结
第8章 隐含波动率曲面动态
8.1 随机波动率模型下的波动率倾斜动态
8.2 局部波动率模型下的波动率倾斜动态
8.3 随机隐含波动模型
8.4 数字期权和数字Cliquets
第9章 障碍期权
9.1 定义
9.2 特殊情况
9.3 反射原理
9.4 回溯对冲法
9.5 平价公式
9.6 准静态对冲和定性估价
9.7 针对离散监测的调整
9.8 巴黎期权
9.9 障碍期权的应用
9.10 结论
第10章 奇异凯利期权
10.1 局部封顶、全局封底凯利
10.2 反向凯利
10.3 拿破仑
第11章 波动率衍生品
11.1 一般的欧式收益结构概览

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

11.2 方差和波动率互换
11.3 波动率衍生品定价
11.4 基于二次变差的交易所交易衍生品
11.5 总结
参考文献

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第1章 随机波动率和局部波动率

这一章，作为研究波动率曲面（Volatility Surface）的第一步，我们介绍了随机波动率（Stochastic Volatility）模型，随机波动率的意思就是波动率服从一个随机过程。之后，我们证明了局部方差（Local Variance）是瞬时方差（Instantaneous Variance）的条件期望。所以，有时候我们计算某些值（比如：期权价格）的时候，感觉未来的波动率像是确定的而不是随机的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

1.1 随机波动率

如果你仔细观察一下股票市场上波动率曲面的实际情况，就能够理解为什么要用一个随机变量来表示波动率了。举个最有标志性的例子，就是1987年10月的股票市场崩盘。尽管Black-Scholes模型用非常简洁的方式给出了期权价格，鉴于其假设条件的局限性，选择这个模型并不明智。

随机波动率模型非常有用，因为这些模型用自成体系的方式解释了为什么同一标的、不同到期时间、不同执行价格的期权有不同的隐含波动率（Implied Volatility），我们称这种现象为“波动率微笑（Volatility Smile）”。与其他刻画波动率微笑的模型（比如：局部波动率模型）不同，随机波动率模型对标的资产动态的假设更加符合实际。随机波动率模型假设波动率服从一个随机过程，所以很多人指责这类模型没有固定的状态，任何一种状态都是临时的。相反，我们其实可以把随机波动率模型看作从属于一个随机时钟的布朗运动（Brownian Motion）。这个时钟的每一个时刻相当于某个交易时刻，每个交易时刻有不同的交易量和交易频率（Clark 1973）。这背后的想法就是，随着交易行为的变化，波动率也会变化，所以波动率是随机的。

从对冲的角度来讲，如果交易员选择用Black-Scholes模型，在对冲过程中，为了和市场上的价格数据保持一致，就必须不停地修改关于波动率的假设。这样一来，交易员定价和对冲过程中的不同时刻使用的模型都是不一样的，不符合模型的一致性；而且对冲比率（Hedge Ratio）也会以一种无法控制的方式变化。随机波动率模型的出现就解决了这个问题。

从实际应用的角度来看，这本书中会反复说明基于Black-Scholes模型算出的奇异期权的价格错得厉害。所以，这些产品的经销商试图找到其他模型，希望在定价时能够把波动率微笑这个现象考虑进去。

在图1.1中，我们画出了标准普尔500指数10多年间的对数收益率。从中可以观察到一种现象，就是大的价格变化出现之后倾向于出现大的价格变化、小的价格变化之后倾向于出现小的价格变化，我们称这种现象为“波动率聚类（Volatility Clustering）”。在图1.2中，我们画出了标准普尔500指数77年（1928年—2005年）间对数收益率的频率分布图，可以明显地看到，其对数收益率的分布相比于正态分布有更高的峰、更厚的尾部。图 1.3 中的分位数图示（Quantile-Quantile Plot）描述了对数收益率分布的“尖峰厚尾”程度（如果经

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

验分布是正态分布的话，图中显示的应该是一条直线；曲线的弯曲程度越大，说明“尖峰厚尾”的现象越明显）。

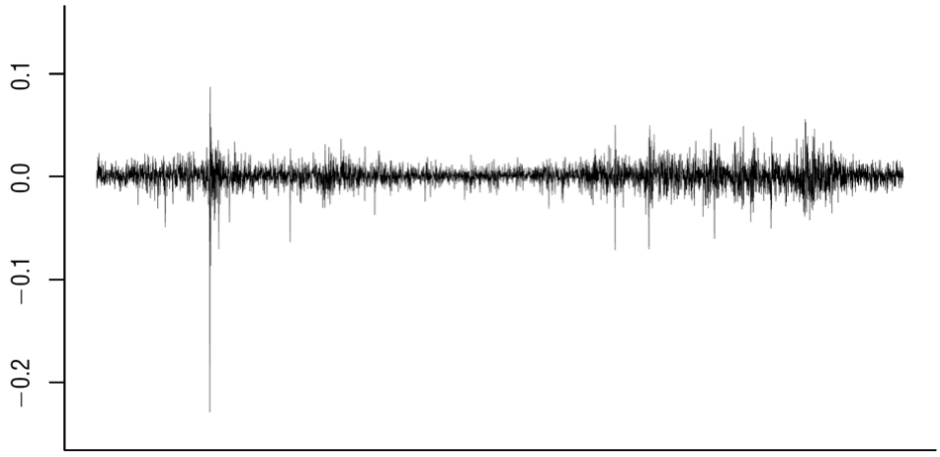


图1.1 1984年12月31日到2004年12月31日，标准普尔500指数的日级别对数收益率。注意，-22.9%的收益率发生在1987年10月19日

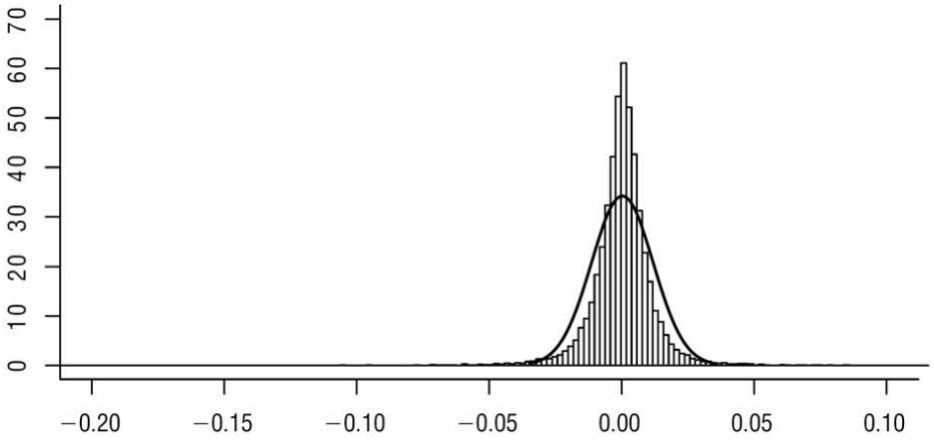


图1.2 77年间标准普尔500指数日级别对数收益率的频率分布图与正态分布的对比。1987年10月19日出现了-22.9%的收益率，虽然图上不能明显地看出来，但是为了涵盖这个数据点，x轴向左延伸了很多

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

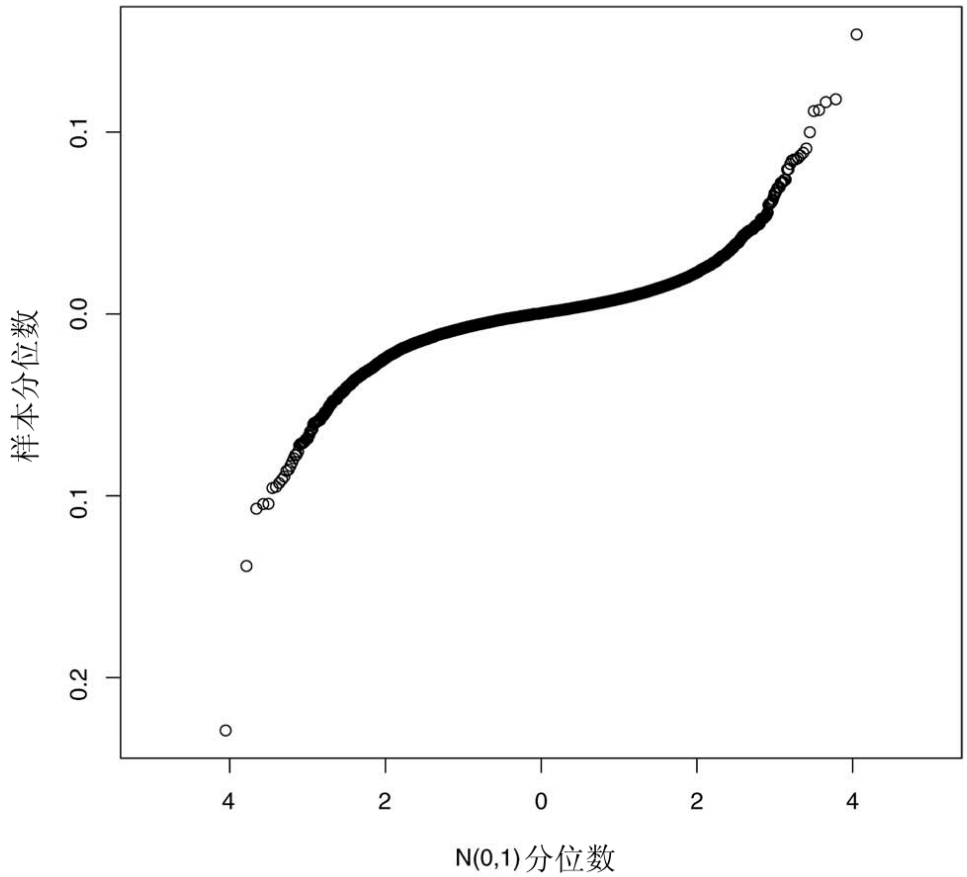


图1.3 标准普尔500指数日级别对数收益率的Q-Q图与正态分布的对比。注意尾部的极端情况

“尖峰厚尾”是一些方差不同的分布的混合分布的明显特征，这种现象也促使我们用一个随机变量来描述方差（波动率的平方）。另外，我们之前提到的波动率聚类现象说明波动率（或方差）具有自相关性。所以，我们一般用均值回复（Mean Reversion）过程[1]来描述波动率动态。

一个简单的经济现象可以说明波动率是均值回复的（同样的论据也曾用来说明利率是均值回复的）。回想一下这100年间IBM公司股票收益率的分布情况。如果波动率不是均值回复的（即波动率的分布是不稳定的），那么 IBM 公司股票的波动率处于1%到100%之间的概率是非常低的。实际中，IBM股票的波动率是在一个固定的范围内变化的，由此可以推断出波动率实际上是均值回复的。

现在，我们知道为什么要用一个均值回复过程来描述方差了。下面就给出具体的模型和定价公式。

定价公式的推导

本节的内容借鉴了Willmott （2000），假设股票价格S和它的方差v服从下面的随机微分方程：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\mathrm{d}S_t = \mu_t S_t \mathrm{d}t + \sqrt{v_t} S_t \mathrm{d}Z_1 \qquad (1.1)$$

$$\mathrm{d}v_t = \alpha\left(S_t, v_t, t\right)\mathrm{d}t + \eta\beta\left(S_t, v_t, t\right)\sqrt{v_t}\,\mathrm{d}Z_2 \qquad (1.2)$$

其中，

$$\left\langle \mathrm{d}Z_1\ \mathrm{d}Z_2 \right\rangle = \rho \mathrm{d}t$$

t μ是随机微分方程的漂移项，在这里它是确定的，不是随机的，它表示股票价格的瞬时回报率，η是波动率的波动率（Volatility of Volatility），ρ是股票收益率与波动率v_t的变化的相关性。$\mathrm{d}Z_t^1$和$\mathrm{d}Z_t^2$是随机过程。

（1.1）式所表示的随机过程和Black、Scholes （1973）的文章中的过程相同。当η→0时，可以得到标准的时变波动率版本的Black-Scholes 公式，推导过程见Willmott （2000）的第8章第6节。在实际应用中，这是对随机波动率期权定价模型的一个关键的要求，因为业界工作者觉得期权价格始终应该在Black-Scholes公式的框架下表达。

相反，（1.2）式中方差的随机过程就比较随意了。我们不对函数α（•）和β（•）做任何假设。而且，我们也不一定要假设（1.2）服从一个平方根过程。

在Black-Scholes模型框架下，只有股票价格一种随机源，它可以通过买卖股票对冲掉。在随机波动率模型框架下，波动率也是一种随机源，这种新的随机源也需要被对冲掉，才能构建无风险的投资组合。现在我们来构建一个投资组合Π，我们用V （S， v，t）来表示被定价的期权的价格；组合中包含的股票头寸为-Δ；为了对冲波动率风险，我们还需要引入某一种价格依赖于波动率的资产，我们用V_1来表示它的价格，在资产组合中这种资产的头寸为-Δ_1。我们有：

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 V_1$$

在极小的时间dt内，资产组合价格的变化为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi = & \left\{\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial \nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right\}\mathrm{d}t \\
& -\Delta_1\left\{\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}+\rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu^2}\right\}\mathrm{d}t \\
& +\left\{\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial S}-\Delta\right\}\mathrm{d}S \\
& +\left\{\frac{\partial V}{\partial \nu}-\Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial \nu}\right\}\mathrm{d}\nu
\end{aligned}$$

在上面的公式中，为了书写清晰，我们没有显式写出状态变量S_t和v_t对时间t的依赖，也没有写出α和β对状态变量和时间的依赖。为了使得投资组合是无风险的，我们需要消除随机项。为了消除dS，需要保证下式成立：

$$\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial S}-\Delta=0$$

为了消除dv项，需要保证下式成立：

$$\frac{\partial V}{\partial \nu}-\Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial \nu}=0$$

这样我们就得到了：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi = & \left\{\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial \nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2}\right\}\mathrm{d}t \\
& -\Delta_1\left\{\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}+\rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial \nu^2}\right\}\mathrm{d}t \\
& =r\Pi\mathrm{d}t \\
& =r\left(V-\Delta S-\Delta_1 V_1\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

后面两个等式成立，是因为无风险投资组合的收益率必须为无风险利率 r。将所有与V相关的项放在等式左侧、所有与V_1相关的项放在等式右侧，我们得到：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial\nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2}+r\frac{\partial V}{\partial S}S-rV}{\frac{\partial V}{\partial\nu}}$$

$$=\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}+\rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V_1}{\partial\nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial\nu^2}+r\frac{\partial V_1}{\partial S}S-rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial\nu}}$$

等式左侧是只和V有关的函数，右边是只和V_1有关的函数f。这种情况成立，唯一的可能就是两边都等于关于独立的状态变量 S、v、t 的某个函数。因此，我们得出：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial\nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV \qquad (1.3)$$
$$=-\left(\alpha-\phi\beta\sqrt{\nu}\right)\frac{\partial V}{\partial\nu}$$

不失一般性，我们将关于S、v、t的任意函数f设为$\left(\alpha-\phi\beta\sqrt{\nu}\right)$，其中α和β是瞬时方差的随机微分方程（1.2）的漂移项和波动率方程。

波动率风险的市场价格： Φ（S， v，t）被称为波动率风险的市场价格。我们还是要引用Wilmott的解释来告诉大家为什么这样叫它。

考虑一个包含了被对冲了Delta风险（Vega风险未被对冲）的期权V的投资组合，即：

$$\Pi_1=V-\frac{\partial V}{\partial S}S$$

我们再次使用伊藤引理，得：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$d\Pi_1=\left\{\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial\nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2}\right\}dt$$
$$+\left\{\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta\right\}dS+\left\{\frac{\partial V}{\partial\nu}\right\}d\nu$$

因为期权已经被 Delta对冲过了，所以 dS 前面的系数应该为零，这样我们就有：

$$d\Pi_1-r\Pi_1 dt$$
$$=\left\{\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\rho\eta\nu\beta S\frac{\partial^2 V}{\partial\nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV\right\}dt$$
$$+\frac{\partial V}{\partial\nu}d\nu$$
$$=\beta\sqrt{\nu}\frac{\partial V}{\partial\nu}\left\{\phi(S,\nu,t)dt+\eta dZ_2\right\}$$

推导过程中我们用到了随机微分方程（1.2）和定价方程（1.3）。由上式可见，每单位波动率风险 dZ_t^2 对应的超额收益为Φ（S，ν，t）dt，对比资本资产定价模型（Capital Asset Pricing Model），Φ可被称为波动率风险的市场价格。

现在我们定义风险中性漂移项为：

$$\alpha'=\alpha-\beta\sqrt{\nu}\phi$$

由此可见，只要考虑期权定价的问题，我们就要从v的风险中性随机微分方程考虑：

$$d\nu=\alpha' dt+\beta\sqrt{\nu}dZ_2$$

因为我们在风险中性世界中给期权定价，所以不能用非风险中性测度下的过程进行定价。

在下文中，我们会一直假设S和v的随机微分方程是风险中性测度下的过程，因为我们需要通过拟合期权价格数据来校正模型参数。这样，我们通过校正得到的随机过程就是风险中性测度下的随机过程。

如果我们想知道期权价格和标的资产收益率的历史时间序列数据的关系，就需要理解统计测度和风险中性测度的联系，在不同的测度

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

下状态变量的漂移项不同。从现在开始，后文出现的随机微分方程都是风险中性测度下的表示。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

1.2 局部波动率

历史

鉴于随机波动率模型的计算复杂性、通过拟合市场期权价格数据得到模型参数的难度，业界工作者们想到了另一种可以保持与波动率偏态（Volatility Skew）一致的给奇异期权定价的方法。在Breeden、Litzenberger（1978）这篇文章发表之前，大家（至少是场内交易员）就已经知道如何利用欧式期权的市场价格派生出风险中性密度函数了。Dupire （1994）和Derman、Kani （1994）[2]的研究是一个重大的突破，他们注意到在风险中性测度下，存在唯一的、与这个风险中性密度函数一致的扩散过程。这个唯一的、与现在的欧式期权价格一致的、状态依赖的分散项系数σ_L（S，t）就是**局部波动率方程。**

实际上Dupire、Derman、Kani并不认为局部波动率代表了波动率的实际运动情况。相反，他们认为局部波动率代表了随机波动率世界所有可能的瞬时波动率的某种形式的平均值。局部波动率模型并不代表一类独立的模型，这个模型的主要目的是为了简化假设条件，便于业界工作者在保证与现在的香草期权价格一致的情况下给奇异期权定价。

Dumas、Fleming、Whaley（1998）中做了一个经验分析，证实了波动率曲面的动态与常数局部波动率的假设不符。

后面，我们会说明局部波动率实际上就是瞬时波动率的平均，与创建局部波动率模型的业界工作者的想法一致。

简单回顾Dupire的研究成果

给定到期时间T，已知现在的股票价格为S_0。通过下面的关系式，我们可以通过不同敲定价格对应的、离散的期权价格数据集{C（S_0，K，T）}推导出到期时刻的股票价格S_T的风险中性密度函数Φ。

$$C(S_0,K,T)=\int_K^\infty dS_T\varphi(S_T,T;S_0)(S_T-K)$$

对上式求两次关于K的导数，我们可以得到：

$$\varphi(K,T;S_0)=\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

这样，我们通过对未贴现的期权价格求关于K的二阶导数，就可以得到对应期限的阿罗-德布鲁（Arrow-Debreu）证券的价格。这个过程对于期权交易员来说再熟悉不过了，他们围绕某一敲定价格构建无穷尽的蝶式套利组合时会用到这个过程。

Dupire的研究成果告诉我们，已知到期时刻的股票价格S_T（股票现价为S_0）的条件密度函数，有唯一的风险中性分散过程与之对应。也就是说，给定所有期权价格的数据，我们可以推导出与这组价格数据对应的、唯一的风险中性分散过程的分散项的函数形式。我们知道局部波动率实际上是关于股票现价S_0的函数，所以我们将局部波动率模型的股价过程写为：

$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\mu_t dt+\sigma\left(S_t,t;S_0\right)\mathrm{d}Z$$

通过应用伊藤引理和风险中性理论，我们可以得到一个关于股票价格的函数的偏微分方程，这个方程实际上是一个一般化的Black-Scholes方程。特别地，伪概率密度函数 $\varphi\left(K,T;S_0\right)=\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$ 必须满足Fokker-Planck方程。这样我们就得到了未贴现的期权价格C关于执行价格K的方程：

$$\frac{\partial C}{\partial T}=\frac{\sigma^2K^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}+\left(r_t-D_t\right)\left(C-K\frac{\partial C}{\partial K}\right) \qquad (1.4)$$

其中r_T是无风险利率，D_T是红利率，C是C（S_0，K，T）的缩写。

Dupire公式的推导

假设股票价格过程的风险中性漂移项为μ_t（$=r_t-D_t$）、局部波动率为σ（S_t，t），即股票价格过程服从下式：

$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\mu_t\mathrm{d}t+\sigma\left(S_t,t\right)\mathrm{d}Z$$

给定到期时间T、执行价格K，未贴现的欧式看涨期权风险中性价格C（S_0，K，T）由下式表示：

$$C\left(S_0,K,T\right)=\int_K^\infty dS_T\varphi\left(S_T,T;S_0\right)\left(S_T-K\right) \qquad (1.5)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

这里Φ（S_T，T；S_0） 是到期时刻的股票价格 S_T 的伪概率密度函数。它满足Fokker-Planck方程：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S_T^2}\left(\sigma^2 S_T^2\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial S_T}\left(\mu S_T\varphi\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial T}$$

对期权价格求关于K的导数，我们得到下面的式子：

$$\frac{\partial C}{\partial K}=-\int_K^\infty \mathrm{d}S_T\varphi\left(S_T,T;S_0\right)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}=\varphi\left(K,T;S_0\right)$$

现在，对（1.5）求关于T的导数，得到：

$$\frac{\partial C}{\partial T}=\int_K^\infty \mathrm{d}S_T\left\{\frac{\partial}{\partial T}\varphi\left(S_T,T;S_0\right)\right\}\left(S_T-K\right)$$

$$=\int_K^\infty \mathrm{d}S_T\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S_T^2}\left(\sigma^2 S_T^2\varphi\right)-\frac{\partial}{\partial S_T}\left(\mu S_T\varphi\right)\right\}\left(S_T-K\right)$$

经过两次分部积分，我们得到标的资产动态过程的漂移项为 μ_T 时的Dupire公式：

$$\frac{\partial C}{\partial T}=\frac{\sigma^2K^2}{2}\varphi+\int_K^\infty \mathrm{d}S_T\mu S_T\varphi$$

$$=\frac{\sigma^2K^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}+\mu(T)\left(C-K\frac{\partial C}{\partial K}\right)$$

我们知道，股票价格关于T时刻的远期价格可以表示如下：

$$F_T=S_0\exp\left\{\int_0^T \mathrm{d}t\,\mu_t\right\}$$

$$F_T=S_0\exp\left\{\int_0^T \mu(t)\mathrm{d}t\right\}^*$$

如果我们将期权价格写成关于远期价格 [3] 的函数C （F_T，K，T），Dupire公式变成如下形式：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\frac{\partial C}{\partial T}=\frac{1}{2}\sigma^2K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

由上式我们可以得到：

$$\sigma^2\left(K,T,S_0\right)=\frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \qquad (1.6)$$

等式（1.6）的右端可以通过欧式期权的市场数据计算出来。所以，如果我们有所有到期日和执行价格的欧式期权的价格，就可以通过等式（1.6）唯一确定局部波动率。

公式（1.6）是局部波动率的一种定义式，它与实际驱动波动率的动态过程（比如：波动率服从某一个随机波动率模型）无关。

局部波动率与隐含波动率的关系

期权的市场价格是按照Black-Scholes模型的隐含波动率 σ_{BS}（K，T；S_0）进行报价的。也就是说，我们可以将期权价格表示成：

$$C\left(S_0,K,T\right)=C_{BS}\left(S_0,K,\sigma_{BS}\left(S_0,K,T\right),T\right)$$

为了使计算更加方便，我们下面要做一下变量替换，用另外两个变量来表示期权价格函数。第一个变量是 Black-Scholes 模型的总体隐含方差（Implied Total Variance）ω，定义如下：

$$\omega\left(S_0,K,T\right):=\sigma_{BS}^2\left(S_0,K,T\right)T$$

另外一个变量是对数执行价格（log-strike）y，定义如下：

$$y=\log\left(\frac{K}{F_T}\right)$$

其中，$F_T=S_0\exp\left\{\int_0^T \mathrm{d}t\,\mu(t)\right\}$ 是股票价格在0时刻关于T时刻的远期价格。期权价格的Black-Scholes公式可以用这些变量表示成如下形式：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$C_{BS}\left(F_T,y,\omega\right)=F_T\left\{N\left(d_1\right)-\mathrm{e}^{y}N\left(d_2\right)\right\}$$
$$=F_T\left\{N\left(-\frac{y}{\sqrt{\omega}}+\frac{\sqrt{\omega}}{2}\right)-\mathrm{e}^{y}N\left(-\frac{y}{\sqrt{\omega}}-\frac{\sqrt{\omega}}{2}\right)\right\} \quad (1.7)$$

公式（1.4）的Dupire公式变为：

$$\frac{\partial C}{\partial T}=\frac{\nu_L}{2}\left\{\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}-\frac{\partial C}{\partial y}\right\}+\mu(T)C \quad (1.8)$$

其中 $\nu_L=\sigma^2$（S_0，K，T），代表局部方差。现在，对 Black-Scholes 求导，我们得到下面的式子：

$$\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial\omega^2}=\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{2\omega}+\frac{y^2}{2\omega^2}\right)\frac{\partial C_{BS}}{\partial\omega}$$

$$\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y\partial\omega}=\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{\omega}\right)\frac{\partial C_{BS}}{\partial\omega}$$

$$\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2}-\frac{\partial C_{BS}}{\partial y}=2\frac{\partial C_{BS}}{\partial\omega} \quad (1.9)$$

通过变量替换，我们可以将公式（1.8）表示成关于隐含方差的式子：

$$\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{\partial C_{BS}}{\partial y}+\frac{\partial C_{BS}}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial\omega^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial C_{BS}}{\partial\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial T}=\frac{\partial C_{BS}}{\partial T}+\frac{\partial C_{BS}}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial T}=\frac{\partial C_{BS}}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial T}+\mu(T)C_{BS}$$

公式（1.7）中只有远期价格 $F_T=S_0\exp\left\{\int_0^T \mathrm{d}t\,\mu(t)\right\}$ 是与T有关的，所以才有上面最后一个等式。现在公式（1.8）就变成了下面的形式：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial T}$$

$$=\frac{\nu_L}{2}\left\{-\frac{\partial C_{BS}}{\partial y}+\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2}-\frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}+2\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y \partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \omega^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right\}$$

$$=\frac{\nu_L}{2}\frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega}\left\{2-\frac{\partial \omega}{\partial y}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{2\omega}+\frac{y^2}{2\omega^2}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right\}$$

消去等式两边的 $\frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega}$ ，我们得到：

$$\frac{\partial \omega}{\partial T}=\nu_L\left\{1-\frac{y}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{\omega}+\frac{y^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right\}$$

变换上式得到：

$$\nu_L=\frac{\frac{\partial \omega}{\partial T}}{1-\frac{y}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{\omega}+\frac{y^2}{\omega^2}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}} \qquad (1.10)$$

特殊情况：倾斜度（skew）为零[4]

如果倾斜度 $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ 为零，由公式（1.10）我们有：

$$\nu_L=\frac{\partial \omega}{\partial T}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

在这种情况下，局部方差就变成了远期Black-Scholes隐含方差。结果如下：

$$\omega(T)=\int_0^T \nu_L(t)\mathrm{d}t$$

局部方差相当于瞬时方差的条件期望

这个结论最开始是由Dupire（1996）和Derman、Kani（1998）推导出来的。本书中，我们引用了Derman和Kani的推导过程，假设股票价格服从公式（1.1）所定义的随机过程，远期价格为 $F_{t,T}=S_t\exp\left\{\int_t^T \mathrm{d}s\mu_s\right\}$，远期价格的动态过程为：

$$\mathrm{d}F_{t,T}=\sqrt{\nu_t}F_{t,T}\mathrm{d}Z \qquad (1.11)$$

注意，在到期时刻 T，$dF_{T,T}=dS_T$。在不考虑贴现的情况下，一个执行价格为K、到期时间为T的欧式看涨期权的价格为：

$$C(S_0,K,T)=\mathbb{E}\left[(S_T-K)^+\right]$$

对上式求关于K的一阶导数得：

$$\frac{\partial C}{\partial K}=-\mathbb{E}\left[\theta(S_T-K)\right]$$

其中，θ（•）为Heaviside函数。继续对上式求关于K的一阶导数得：

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}=\mathbb{E}\left[\delta(S_T-K)\right]$$

其中，δ（•）为Dirac函数。

现在，我们对期权的到期支付函数使用伊藤引理，结合$dF_{T,T}=dS_T$，得到下式：

$$\mathrm{d}(S_T-K)^+=\theta(S_T-K)\mathrm{d}S_T+\frac{1}{2}\nu_T S_T^2\delta(S_T-K)\mathrm{d}T$$

对上式两边求条件期望，又因为$dF_{T,T}=dS_T$，且$dF_{t,T}$是一个鞅，得到：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\mathrm{d}C = \mathrm{d}\mathbb{E}\left(S_T - K\right)^+ = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\nu_T S_T^2 \delta\left(S_T - K\right)\right]\mathrm{d}T$$

另外，结合条件概率的知识，得到：

$$\mathbb{E}\left[\nu_T S_T^2 \delta\left(S_T - K\right)\right] = \mathbb{E}\left[\nu_T \mid S_T = K\right]\frac{1}{2}K^2\mathbb{E}\left[\delta\left(S_T - K\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\nu_T \mid S_T = K\right]\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

将上面两个式子结合起来，我们有：

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \mathbb{E}\left[\nu_T \mid S_T = K\right]\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

将上面的式子与局部波动率的定义式（1.6）比较，我们就得到：

$$\sigma^2\left(K, T, S_0\right) = \mathbb{E}\left[\nu_T \mid S_T = K\right] \qquad (1.12)$$

也就是说，局部方差（局部波动率的平方）实际上就是风险中性测度下，到期时刻的股票价格S_T等于K的情况下，瞬时方差的条件期望。

---

[1]注意：单纯的跳扩散模型（Jump-Diffusion Models）没有这个性质。非均值回复的跳扩散模型，在股票价格跳跃之后不会向回变动。

[2]Dupire的研究成果是基于连续时间理论的，Derman、Kani给出了离散时间二叉树的版本。

[3]从现在开始我们用μ_T表示股票价格过程的的风险中性漂移项，它是无风险利率 r_T和红利率d_T的差。

[4]这意味着倾斜度$\frac{\partial}{\partial K}\sigma_{BS}$（$S_0$，K，T）为零。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第2章 风险均衡原理简介

在本章中，我们将介绍最著名、最流行的随机波动率模型——Heston模型。并且，我们将给出Heston模型下，欧式期权定价公式的详细推导过程。我们还会展示对Heston模型进行蒙特卡洛模拟之前如何将Heston模型假设的动态过程离散化，并从数值算法的复杂性和耗时性的角度阐述Heston模型被广泛应用的原因。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

2.1 动态过程

参照公式（1.1）（1.2）的动态过程，令 $\alpha(S,\nu_t,t)=-\lambda(\nu_t-\bar{\nu})$，令β（S，ν，t）=1，我们就得到Heston模型（Heston（1993））。Heston模型假设的动态过程如下：

$$\mathrm{d}S_t=\mu_t S_t\mathrm{d}t+\sqrt{\nu_t}S_t\mathrm{d}Z_1 \qquad (2.1)$$

$$\mathrm{d}\nu_t=-\lambda(\nu_t-\bar{\nu})\mathrm{d}t+\eta\sqrt{\nu_t}\mathrm{d}Z_2 \qquad (2.2)$$

其中，

$$\langle \mathrm{d}Z_1\ \mathrm{d}Z_2\rangle=\rho\mathrm{d}t$$

其中，λ代表ν_t的均值回复速度，$\bar{\nu}$代表ν_t的长期均值。

瞬时方差ν_t服从的随机过程是Cox、Ingersoll和Ross（1985）文中的平方根均值回复过程，它是仿射跳跃扩散过程（Affine Jump Diffusion）没有跳的特殊形式。仿射跳扩散过程是指漂移项、协方差项和跳跃强度（Jump Intensitiy）是状态向量{x，ν}的线性函数的跳扩散过程，其中x=log（S）。Duffie、Pan和Singleton（2000）一文中指出，一般情况下，仿射跳扩散过程具有解析方面的简便性。得到解的过程涉及计算一个“扩展的变化”，在Heston模型下，这个变换是一个常规的傅里叶变换。

现在，我们将α（S，ν，t）和β（S，ν，t）代入公式（1.3）中，得到：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\rho\eta\nu S\frac{\partial^2 V}{\partial\nu\,\partial S}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\frac{\partial^2 V}{\partial\nu^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=\lambda(\nu-\bar{\nu})\frac{\partial V}{\partial\nu} \qquad (2.3)$$

为了保证从统计测度变换到风险中性测度之后，随机微分方程的形式保持不变，Heston在他的文章中假设风险市场价格是瞬时方差ν的线性函数。在这里，与Heston文章中不同，我们是通过期权价格数据得到模型参数的，这样得到的动态过程是风险中性测度下的动态过程，所以与公式（1.3）不同，在公式（2.3）中，波动率风险的市场

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

价格 Φ 为零。因为我们只对定价感兴趣，而且定价是在风险中性测度下进行的，所以在这里我们不涉及统计测度和风险的市场价格这一问题。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

2.2 Heston模型下的欧式期权定价公式

本节中关于欧式期权定价公式的推导过程基本遵循了Heston（1993）原文中的推导过程，中间有些定义略有改动，我们会在后文中解释。

在给定适当边界条件的情况下求解方程（2.3）之前，我们先做一些变量替换。K是期权的执行价格，T是期权的到期时刻，$F_{t,T}$是股票在T时刻的远期价格，x：=log （$F_{t,T}$ /K）。

此外，假设我们更重视欧式期权未来的价格C而不是现在的价格，我们定义τ=T-t。公式（2.3）就变成了：

$$-\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu C_{11}-\frac{1}{2}\nu C_1+\frac{1}{2}\eta^2\nu C_{22}+\rho\eta\nu C_{12}-\lambda\left(\nu-\bar{\nu}\right)C_2=0 \qquad (2.4)$$

其中，下标1和2分别代表关于x和ν的微分。

根据Duffie、Pan和Singleton （2000），方程（2.4）解具有以下形式：

$$C\left(x,\nu,\tau\right)=K\left\{e^x P_1\left(x,\nu,\tau\right)-P_0\left(x,\nu,\tau\right)\right\} \qquad (2.5)$$

上面的公式是Black-Scholes公式的形式，括号中的第一项代表期权到期为实值情况下标的资产最终价格的伪期望，第二项代表期权执行的伪概率。

我们将（2.5）代入方程（2.4），推出P_0和P_1满足下面的式子：

$$-\frac{\partial P_j}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}-\left(\frac{1}{2}-j\right)\nu\frac{\partial P_j}{\partial x}+\frac{1}{2}\eta^2\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial\nu^2}+\rho\eta\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial x\partial\nu} \qquad (2.6)$$
$$+\left(a-b_j\nu\right)\frac{\partial P_j}{\partial\nu}=0$$

对于 j=0，1，我们有：

$$a=\lambda\bar{\nu},b_j=\lambda-j\rho\eta$$

方程的边界条件为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\lim_{\tau\to 0} P_j(x,\nu,\tau)=\begin{cases}1\ if\ x>0\\ 0\ if\ x\leqslant 0\end{cases} \qquad (2.7)$$
$$:=\theta(x)$$

基于边界条件（2.6），我们使用傅里叶变换的技术求解方程（2.7）。为此，我们通过下式定义P_j的傅里叶变换：

$$\tilde{P}(u,\nu,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x e^{-iux}P(x,\nu,\tau)$$

令τ=0，得到：

$$\tilde{P}(u,\nu,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x e^{-iux}\theta(x)=\frac{1}{iu}$$

逆傅里叶变换为：

$$P(x,\nu,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}e^{iux}\tilde{P}(u,\nu,\tau) \qquad (2.8)$$

将这个式子代入（2.6）得到：

$$-\frac{\partial\tilde{P}_j}{\partial\tau}-\frac{1}{2}u^2\nu\tilde{P}_j-\left(\frac{1}{2}-j\right)iu\nu\tilde{P}_j$$
$$+\frac{1}{2}\eta^2\nu\frac{\partial^2\tilde{P}_j}{\partial\nu^2}+\rho\eta iu\nu\frac{\partial\tilde{P}_j}{\partial\nu}+(a-b_j\nu)\frac{\partial\tilde{P}_j}{\partial\nu}=0 \qquad (2.9)$$

现在定义下列式子：

$$\alpha=-\frac{u^2}{2}-\frac{iu}{2}+iju$$
$$\beta=\lambda-\rho\eta j-\rho\eta iu$$
$$\gamma=\frac{\eta^2}{2}$$

这样方程（2.9）就变成了：

$$\nu\left\{\alpha\tilde{P}_j-\beta\frac{\partial\tilde{P}_j}{\partial\nu}+\gamma\frac{\partial^2\tilde{P}_j}{\partial\nu^2}\right\}+a\frac{\partial\tilde{P}_j}{\partial\nu}-\frac{\partial\tilde{P}_j}{\partial\tau}=0 \qquad (2.10)$$

因为动态过程是仿射的，所以我们有下面的式子：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\tilde{P}_j(u,\nu,\tau)=\exp\left\{C(u,\tau)\bar{\nu}+D(u,\tau)\nu\right\}\tilde{P}_j(u,\nu,0)$$
$$=\frac{1}{iu}\exp\left\{C(u,\tau)\bar{\nu}+D(u,\tau)\nu\right\}$$

对上面的式子求导，得到下面的式子：

$$\frac{\partial\tilde{P}_j}{\partial\tau}=\left\{\bar{\nu}\frac{\partial C}{\partial\tau}+\nu\frac{\partial D}{\partial\tau}\right\}\tilde{P}_j$$
$$\frac{\partial\tilde{P}_j}{\partial\nu}=D\tilde{P}_j$$
$$\frac{\partial^2\tilde{P}_j}{\partial\nu^2}=D^2\tilde{P}_j$$

为了使（2.10）成立，下面的式子需要成立：

$$\frac{\partial C}{\partial\tau}=\lambda D$$
$$\frac{\partial D}{\partial\tau}=\alpha-\beta D+\gamma D^2 \qquad (2.11)$$
$$=\gamma(D-r_+)(D-r_-)$$

其中，

$$r_\pm=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\gamma}=:\frac{\beta\pm d}{\eta^2}$$

给定边界条件C （u，0）=0和D （u，0）=0，求（2.11）的积分，我们得到：

$$D(u,\tau)=r_-\frac{1-e^{-d\tau}}{1-ge^{-d\tau}}$$
$$C(u,\tau)=\lambda\left\{r_-\tau-\frac{2}{\eta^2}\log\left(\frac{1-ge^{-d\tau}}{1-g}\right)\right\} \qquad (2.12)$$

其中，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$g := \frac{r_-}{r_+}$$

结合公式（2.8）中的逆变换谨慎地处理复积分，我们得到伪概率P_j的最终形式，它实际上是一个实值函数的积分。

$$P_j(x,v,\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\exp\left\{C_j(u,\tau)\bar{v} + D_j(u,\tau)v + iux\right\}}{iu}\right\} \qquad (2.13)$$

这个积分可以用标准的数值积分算法进行计算。

值得注意的是，在 Heston 模型下计算 Delta（期权价格相对于标的资产价格的变化率）和 Vega（期权价格相对于波动率的变化率）时，采取求x和 v 的导数的方式更直接、更方便，因为函数C （u，τ）和D （u，τ）是与x和 v 无关的。

题外话：公式（2.13）中复数的对数函数

在Heston的文章中，还有很多关于这个主题的其他文章中，C（u，τ）“几乎”等价于如下形式：

$$C(u,\tau) = \lambda\left\{r_+\tau - \frac{2}{\eta^2}\log\left(\frac{e^{+d\tau} - g}{1-g}\right)\right\} \qquad (2.14)$$

我们之所以说“几乎”等价于，是因为只有在选定复数的对数值使得C （u，τ）是关于u的连续函数的情况下，上面的公式才和我们的公式吻合。复数的对数函数是多值函数，每当复数的辐角穿过负实轴的时候，C （u，τ）都会出现不连续的跳跃。这个问题最传统的解决方案是小心地追踪公式（2.13）中的绕数，使得变量一直在一张黎曼面上。理论上是这样讲，但是实际执行的时候就遇到问题了，传统的数值积分无法处理复数的对数不连续的问题。Kahl、Jackel（2005）的文章给出了解决这个问题的方案。

我们在公式（2.12）中定义的C （u，τ）的优势在于，当对数的辐角的虚部为零时，其实部是正数；将其画在复平面中，可以看到，对数的辐角永远不会穿过负实轴。采用本书中对C （u，τ）的定义式，取复数的对数的主值，可以保证被积函数在整个积分域中是连续的。不幸的是，证明过程尚不明确，这个结论暂时也只是个猜测而已。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

2.3 Heston模型下特征函数的推导

对于期权交易员之外的其他人，先得到期权的定价公式，之后再估计特征函数，这个过程似乎违反常态，反过来可能更容易被人接受。但是，从理解波动率曲面的角度来讲，期权价格确实是整个过程的第一步，对我们而言，从期权价格推导出标的资产价格的特征函数和从期权价格推导出标的资产价格在风险中性测度下的条件密度函数是等价的。

特征函数的定义如下：

$$\phi_T(u) := \mathbb{E}\left[e^{iux_T} \mid x_t = 0 \right]$$

到期时刻标的资产的对数收益率x_T大于对数执行价格k的概率为：

$$\begin{aligned}\Pr(x_T > x) &= P_0(x,\nu,\tau) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\, \mathrm{Re}\left\{ \frac{\exp\{C(u,\tau)\bar{\nu} + D(u,\tau)\nu + iux\}}{iu} \right\}\end{aligned}$$

其中，x=log （S_t /K），τ=T-t。对数执行价格k=log （K/S_t ）=-x。根据下面的式子，我们可以得到标的资产的对数收益率x的概率密度函数p（k）：

$$\begin{aligned}p(k) &= -\frac{\partial P_0}{\partial k} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty du' \exp\{C(u',\tau)\bar{\nu} + D(u',\tau)\nu - iu'k\}\end{aligned}$$

然后，我们有：

$$\begin{aligned}\phi_T(u) &= \int_{-\infty}^\infty dk\, p(k) e^{iuk} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty du' \exp\{C(u',\tau)\bar{\nu} + D(u',\tau)\nu\}\int_{-\infty}^\infty du e^{i(u-u')k} \\ &= \int_{-\infty}^\infty du' \exp\{C(u',\tau)\bar{\nu} + D(u',\tau)\nu\}\delta(u-u') \\ &= \exp\{C(u,\tau)\bar{\nu} + D(u,\tau)\nu\}\end{aligned} \qquad (2.15)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

2.4 Heston模型的仿真模拟

回顾Heston模型的动态过程：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \mu S\mathrm{d}t + \sqrt{v}S\mathrm{d}Z_1 \\ \mathrm{d}v &= -\lambda\left(v-\bar{v}\right)\mathrm{d}t + \eta\sqrt{v}\mathrm{d}Z_2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

其中，

$$\left\langle \mathrm{d}Z_1\ \mathrm{d}Z_2 \right\rangle = \rho\mathrm{d}t$$

对方差过程进行欧拉形式的离散化得到：

$$v_{i+1} = v_i - \lambda\left(v_i-\bar{v}\right)\Delta t + \eta\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}Z \tag{2.17}$$

其中Z～N （0，1），这种情况下又可能会产生负方差。为了解决这个问题，业界工作者通常采取两种办法：一种是“吸收假设”，如果 v ＜0，就令 v =0；另一种是“反射假设”，如果 v ＜0，就令 v =- v 。实际上，我们要通过拟合期权价格数据得到模型参数，这种形式的离散化需要很多时间步数才能收敛。

米尔斯坦离散

我们可以通过米尔斯坦离散充分地避免负方差的问题。

具体来讲，对 v （t+Δt）进行高一阶的伊藤-泰勒展开[1]，我们得到方差过程下面形式的离散化：

$$v_{i+1} = v_i - \lambda\left(v_i-\bar{v}\right)\Delta t + \eta\sqrt{v_i}\sqrt{\Delta t}Z + \frac{\eta^2}{4}\Delta t\left(Z^2-1\right) \tag{2.18}$$

上式可以被改写成下面的形式：

$$v_{i+1} = \left(\sqrt{v_i} + \frac{\eta}{2}\sqrt{\Delta t}Z\right)^2 - \lambda\left(v_i-\bar{v}\right)\Delta t - \frac{\eta^2}{4}\Delta t$$

我们注意到，如果 v_i =0并且 $4\lambda\bar{v}/\eta^2 > 1$，我们有 v_{i+1}＞0。这意味着，这种离散化形式使得负方差发生的概率大幅度下降。实际上，对于标准化的参数，即使是 $4\lambda\bar{v}/\eta^2 < 1$，这种离散形式发生负方差的概率相比于欧拉格式也大大地降低了。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

由于米尔斯坦离散（2.18）比欧拉离散（2.17）更加省时，因此米尔斯坦离散在实际应用中更受欢迎。同时，股票价格应该按照下面的方式进行离散化：

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\nu_i}{2}\Delta t + \sqrt{\nu_i \Delta t} W$$

其中，x_i：=log（S_i /S_0 ），W～N （0，1），且E[ZW]=ρ；我们选择对股票价格的对数进行离散化，而非直接对股票价格过程进行离散化，就不需要对欧拉离散进行高阶修正了。

一种隐格式：我们参考Alfonsi（2005）考虑对方差过程进行下面形式的离散化：

$$\begin{aligned}\nu_{i+1} &= \nu_i - \lambda\left(\nu_i - \bar{\nu}\right)\Delta t + \eta\sqrt{\nu_i}\sqrt{\Delta t}Z \\ &= \nu_i - \lambda\left(\nu_{i+1} - \bar{\nu}\right)\Delta t + \eta\sqrt{\nu_{i+1}}\sqrt{\Delta t}Z \\ &\quad -\eta\left(\sqrt{\nu_{i+1}} - \sqrt{\nu_i}\right)\sqrt{\Delta t}Z + \text{高阶项}\end{aligned}$$

我们注意到：

$$\sqrt{\nu_{i+1}} - \sqrt{\nu_i} = \frac{\eta}{2}\sqrt{\Delta t}Z + \text{高阶项}$$

替换之后（注意 $\mathbb{E}\left[Z^2\right]=1$ ），我们得到隐式离散化：

$$\nu_{i+1} = \nu_i - \lambda\left(\nu_{i+1} - \bar{\nu}\right)\Delta t + \eta\sqrt{\nu_{i+1}}\sqrt{\Delta t}Z - \frac{\eta}{2}\Delta t \qquad (2.19)$$

我们可以通过求解二次方程（2.19）得到 $\sqrt{\nu_{i+1}}$ ：

$$\sqrt{\nu_{i+1}} = \frac{\sqrt{4\nu_i + \Delta t\left[\left(\lambda\bar{\nu} - \eta^2/2\right)\left(1+\lambda\Delta t\right) + \eta^2 Z^2\right]} + \eta\sqrt{\Delta t}Z}{2\left(1+\lambda\Delta t\right)}$$

如果$2\lambda\nu/\eta^2>1$，上面的表示是有实数解的，我们可以保证方差为正。否则的话，我们不能保证方差是正的，这个离散化形式也就无效了。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

一般情况下，Heston模型的参数是不满足$2\lambda v/\eta^2>1$这个条件的，所以我们更倾向于使用米尔斯坦离散化，无论从哪个角度讲，米尔斯坦离散都更加方便。

从精确转移法取样

Paul Glasserman （2004）在他关于蒙特卡洛模拟的书中指出，可以通过从精确转移法（the Exact Transition Law）取样避免负方差的问题。Broadie、Kaya（2004）阐述了如何用这种方法对Heston模型假设的动态过程进行模拟，但是他们的做法涉及对用贝叶斯函数表示的特征函数进行积分，需要耗费很多的计算时间。

但是他们的做法是富有启发性的。随机微分方程（2.16）的精确解为：

$$S_t = S_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \nu_s \mathrm{d}s + \rho\int_0^t \sqrt{\nu_s}\,\mathrm{d}Z_s + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t \sqrt{\nu_s}\,\mathrm{d}Z_s^{\perp}\right\}$$

$$\nu_t = \nu_0 + \lambda\bar{\nu}t - \lambda\int_0^t \nu_s \mathrm{d}s + \eta\int_0^t \sqrt{\nu_s}\,\mathrm{d}Z_s$$

其中，

$$\left\langle \mathrm{d}Z_s \mathrm{d}Z_s^{\perp} \right\rangle = 0$$

Broadie、Kaya的模拟方法如下：

- 给定v_0从v_t的分布生成一个样本；
- 给定v_0和v_t从$\int_0^t \nu_s \mathrm{d}s$的分布生成一个样本；
- 给定v_0、v_t和$\int_0^t \nu_s \mathrm{d}s$得到$\int_0^t \sqrt{\nu_s}\,\mathrm{d}Z_s$；
- 给定$\int_0^t \nu_s \mathrm{d}s$和$\int_0^t \sqrt{\nu_s}\,\mathrm{d}Z_s$从$S_t$的分布中生成一个样本。

注意，最后一步，$\int_0^t \sqrt{\nu_s}\,\mathrm{d}Z_s^{\perp}$服从方差为$\int_0^t \nu_s \mathrm{d}s$的正态分布，因为$\mathrm{d}Z_s^{\perp}$和$v_s$是独立的。

Andersen、Brotherton-Ratcliffe （2001）一文中提出，在模拟像平方根方差过程这样的过程时，可以选择从一个与真实分布类似的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

分布中生成样本，不一定要从真实分布中生成样本；这个近似的分布的方差和期望要与真实分布的方差和期望相同。

为了用这个方法模拟Heston模型的动态过程，我们应该先计算出 $\int_0^t \sqrt{\nu_s}\,dZ_s$、$\int_0^t \nu_s\,ds$、$v_t$，还有$v_0$的均值和方差。

为什么Heston模型这么受欢迎

从我们前面对蒙特卡洛的介绍中，大家就可以看出，在随机波动率模型下得到期权的精确值是需要很大的计算量的；相比之下，偏微分方程的数值解法更为简单一些。Heston模型与其他随机波动率模型最大的不同在于，Heston模型下存在一个可以快速地、方便地实现的欧式期权价格的半显式解。在利用欧式期权市场价格校准模型参数的时候，模型如果能够快速地计算欧式期权的价格是非常重要的。

在后面的章节中我们会了解到，虽然Heston模型的动态过程并不符合实际情况，但是通过适当地选择参数，所有的随机波动率模型生成的隐含波动率曲面的形状都基本相同。而且，从本质上讲，所有的随机波动率模型的动态过程都是由一个股票价格过程和瞬时方法过程组成的，用这些模型计算更加复杂的衍生产品价格的过程大致相同。Heston模型的计算量相对少一些，这就是它比较受欢迎的原因。

---

[1]关于伊藤-泰勒展开，请参考Kloeden、Platen（1992）的第5章。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第3章 隐含波动率曲面

在第1章中，我们介绍了如何通过隐含波动率计算局部波动率。在本章中，我们将展示如何由局部波动率得到隐含波动率。在第1章最后，说明了局部方差是瞬时方差的条件期望，我们可以利用这个结论估算一个给定的随机波动率模型产生的局部波动率，随后就可以得到这个模型产生的隐含波动率。按照这个逻辑，给定一个随机波动率模型，我们就可以大概知道它生成的隐含波动率曲面的形状。

相反，给定一个实际的隐含波动率曲面的形状，我们可以推断出标的资产动态过程的某些特征。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

3.1 从隐含波动率到局部波动率

模型校正

如果一个模型想在实践当中得到应用的话，模型得到的欧式期权价格应该与市场上的欧式期权价格相等，至少是接近的。这意味着，我们需要对模型（无论是随机波动率模型还是局部波动率模型）进行参数校正，使得模型波动率尽量接近市场上的隐含波动率。如果一个模型能够快速精准地计算欧式期权的价格，它的参数矫正会比较简便。对于随机波动率模型来说，Heston模型具有这样一个半显式解，自然它会比较受欢迎。Mikhailov、Nogel （2003）展示了如何用市场数据矫正Heston模型的参数。

在局部波动率模型下求解欧式期权价格的时候往往需要用到数值算法，这是实现局部波动率模型的潜在问题之一。Brigo、Mercurio（2003）通过对局部波动率进行参数化解决了这个问题，参数化后的模型下有欧式期权的显式定价公式，这个定价公式是一些类似于Black-Scholes公式的函数的叠加。

另外，如Derman、Kani、Chriss （1996）所述，我们可以用三叉树模型解决欧式期权定价的问题；或者我们可以像Avellaneda、Friedman、Holmes、Samperi （1997）一样采取（丢失的信息的）相对熵最大的方法。这些方法都是非参数化的方法（假设我们采用期权的实际价格数据，没有插值和外部插值）；这些方法有可能会因为实际价格数据中噪声过大或者存在买卖价差而失效。

最后，我们还可以对风险中性分布进行参数化，如：Rubinstein（1998）；或者直接对隐含波动率曲面进行参数化，如：Shimko（1993）和Gatheral （2004）。尽管，鉴于我们在第1章中给出了从隐含波动率得到局部波动率的公式，这些模型看起来比较直观，可是在实践中这些模型不太好用。问题在于，我们并没有整个隐含波动率曲面的数据，市场上，每个到期日只存在几个离散点的买价和卖价。如果使用参数化方法的话，我们需要对已知的隐含波动率数据进行内部插值和外部插值，插值的时候很难做到排除套利机会。实际中，套利机会体现为：负的垂直价差，蝶式套利组合的价值为负，负的水平价差（这个概念有必要进行仔细的定义）。

在后文中，我们将专注于讨论如何用随机波动率模型构建隐含波动率曲面，这样就不用担心套利机会的存在了，因为套利机会从一开始就被排除了。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

首先，我们得到用局部波动率表示的隐含波动率公式。原则上，有了这个公式，我们就可以观察任何随机波动率模型和局部波动率模型的隐含波动率曲面形状了。因为在任何一个随机波动率模型下，通过公式（1.12），我们可以从随机波动率模型的瞬时方差得到局部方差。

理解隐含波动率

在第1章中，我们介绍了如何用隐含波动率计算局部波动率，见公式（1.10）。如果我们想得到隐含波动率关于局部波动率的表达式，最直接的办法就是从公式（1.10）倒推出隐含波动率。但是，在一般情况下这种方法不可行。Berestycki、Busca、Florent （2002）只是在到期时间趋于零的情况下，用这种方法倒推出了隐含波动率的表达式。

在这里，我们利用Dupire （1998）的成果，得到Black-Scholes隐含方差关于一个路径积分的一般表达式。首先，我们假设股价S_t服从下面的随机微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\mu_t\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}Z_t$$

其中，σ_t可能是随机的。

对于给定的K和T，定义Black-Scholes模型下的gamma：

$$\Gamma_{BS}\left(S_t,\bar{\sigma}(t)\right):=\frac{\partial^2}{\partial S_t^2}C_{BS}\left(S_t,K,\bar{\sigma}(t),T-t\right)$$

进一步定义“Black-Scholes模型的远期隐含方差”为下式：

$$\nu_{K,T}(t)=\frac{\mathbb{E}\left[\sigma_t^2S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t,\bar{\sigma}(t)\right)\middle|\mathcal{F}_0\right]}{\mathbb{E}\left[S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t,\bar{\sigma}(t)\right)\middle|\mathcal{F}_0\right]}\qquad(3.1)$$

其中，

$$\bar{\sigma}^2(t):=\frac{1}{T-t}\int_t^T\nu_{K,T}(u)\mathrm{d}u\qquad(3.2)$$

在任意一条路径上，对于任何适当的关于随机的股票价格S_t的光滑函数f （S_t，t）、任何在这条路径上实现的波动率过程{σ_t}，函数 f （S_t，t）最后的值和初值之间的差都可以用一个微分的积分表示。应用伊藤引理我们得到：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$f\left(S_T,T\right)-f\left(S_0,0\right)=\int_0^T \mathrm{d}f$$
$$=\int_0^T\left\{\frac{\partial f}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\sigma_t^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\mathrm{d}t\right\} \quad (3.3)$$

一般情况下，我们认为看涨期权的非贴现价格等于风险中性测度下其到期收益的条件期望。结合公式（3.3），我们得到：

$$C\left(S_0,K,T\right)=\mathbb{E}\left[\left(S_T-K\right)^+\middle|\mathcal{F}_0\right]$$
$$=\mathbb{E}\left[C_{BS}\left(S_T,K,\bar{\sigma}\left(T\right),0\right)\middle|\mathcal{F}_0\right]$$
$$=C_{BS}\left(S_0,K,\bar{\sigma}\left(0\right),T\right)$$
$$+\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\{\frac{\partial C_{BS}}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t+\frac{\partial C_{BS}}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\sigma_t^2S_t^2\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S_t^2}\mathrm{d}t\right\}\middle|\mathcal{F}_0\right]$$

其中，$C_{BS}\left(S_t,K,\bar{\sigma}\left(t\right),T-t\right)$一定满足 Black-Scholes 公式（假设利率和红利率都为零），结合$\bar{\sigma}\left(t\right)$的定义，我们得到下式：

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\nu_{K,T}\left(t\right)S_t^2\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S_t^2}$$

我们用这个式子代替$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t}$，得到：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$
\begin{aligned}
C(S_0,K,T) &= C_{BS}\left(S_0,K,\bar{\sigma}(0),T\right) \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\{\frac{\partial C_{BS}}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t+\frac{1}{2}\left\{\sigma_t^2-\nu_{K,T}(t)\right\}S_t^2\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S_t^2}\mathrm{d}t\right\}\middle|\mathcal{F}_0\right] \\
&= C_{BS}\left(S_0,K,\bar{\sigma}(0),T\right) \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\int_0^T\frac{1}{2}\left\{\sigma_t^2-\nu_{K,T}(t)\right\}S_t^2\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S_t^2}\mathrm{d}t\middle|\mathcal{F}_0\right]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

因为S_t是一个鞅，所以有最后一个等式。

需要注意的是，对冲过程中的实际波动率σ_t未必与我们一开始期望的波动率相等，这样就会导致期权的售价和对冲成本不相等[1]。

（3.4）式的最后一项给出了按照隐含波动率为$\bar{\sigma}$的价格卖出一份看涨期权、并且按照确定的远期方差函数$\nu_{K,T}$进行动态delta对冲的实际收益的期望值。

根据$\nu_{K,T}$的定义式（3.2），我们可以得到：

$$
\mathbb{E}\left[S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t,\bar{\sigma}(t)\right)\middle|\mathcal{F}_0\right]\nu_{K,T}(t)=\mathbb{E}\left[\sigma_t^2S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t,\bar{\sigma}(t)\right)\middle|\mathcal{F}_0\right]
$$

这样，（3.4）式的最后一项就消掉了。根据隐含波动率的定义，σ（0）是执行价格为K、到期日为T的期权在0时刻的隐含波动率（即，令Black-scholes公式的价格与市场价格相等倒推出隐含波动率）。

确切地说，

$$
\sigma_{BS}(K,T)^2=\bar{\sigma}(0)^2=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\mathbb{E}\left[\sigma_t^2S_t^2\Gamma_{BS}(S_t)\middle|\mathcal{F}_0\right]}{\mathbb{E}\left[S_t^2\Gamma_{BS}(S_t)\middle|\mathcal{F}_0\right]}\mathrm{d}t \tag{3.5}
$$

公式（3.5）将隐含方差表示成瞬时方差在某个测度下的期望值关于时间的积分。

我们可以这样理解公式（3.5），就是说，当我们计算Black-Scholes隐含波动率时，我们需要在所有可能的情景下取所有可能的已实现波动率的平均值，不同的情景代表标的股票价格的不同路径。这个平均值是加权平均值，每条路径的权重就是期权的Gamma（期权价格关于标的资产价格的二阶导数）；在任何时间段，Delta 对冲的盈利

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

与期权的 Gamma、还有期望瞬时方差（或局部方差）与已实现瞬时方差的差成比例。特别是在 Delta 对冲的初期，股票价格的可能性只有一种（就是股票在当时的价格），算平均值的时候，只有到期时刻股票价格为执行价格的路径需要被计算在内，因为其他地方的Gamma值几乎为零。

根据Lee（2005），我们可以将公式（3.5）写得更加优美一点：

$$\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2=\bar{\sigma}\left(0\right)^2=\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}^{G_t}\left[\sigma_t^2\right]\mathrm{d}t \qquad (3.6)$$

因此，根据公式（3.1）的定义，$v_{K,T}(t)$就是σ_t^2在概率测度G_t下的期望值，这个测度相对于风险中性测度P的Radon-Nikodym导数为：

$$\frac{d\mathbb{G}_t}{d\mathbb{P}}:=\frac{S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t,\bar{\sigma}\left(t\right)\right)}{\mathbb{E}\left[S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t,\bar{\sigma}\left(t\right)\right)\middle|\mathcal{F}_0\right]}$$

顺便指出，公式（3.1）和公式（3.5）是隐式的，因为期权的Gamma值$\Gamma_{BS}(S_t)$与所有的远期隐含方差$v_{K,T}(t)$有关。

特殊情况（Black-Scholes）：假设$\sigma_t=\sigma(t)$，只是关于t的一个确定的函数。这样我们就有：

$$\nu_{K,T}\left(t\right)=\frac{\mathbb{E}\left[\sigma\left(t\right)^2S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t\right)\middle|\mathcal{F}_0\right]}{\mathbb{E}\left[S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t\right)\middle|\mathcal{F}_0\right]}=\sigma\left(t\right)^2$$

这时，远期隐含方差$v_{K,T}(t)$与远期方差$\sigma(t)^2$相等。和我们预想的一样，$v_{K,T}(t)$不依赖于到期时间T和执行价格K。

解释：为了更好地理解公式（3.1），首先来回顾一下如何计算风险中性测度下的条件期望：

$$\mathbb{E}^P\left[f\left(S_t\right)\right]=\int\mathrm{d}S_t\,p\left(S_t,t;S_0\right)f\left(S_t\right)$$

我们通过对欧式期权市场价格求关于执行价格K的二阶导数，得到股票价格在t时刻的风险中性条件概率密度函数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$p\left(S_t,t;S_0\right)=\left.\frac{\partial^2 C\left(S_0,K,t\right)}{\partial K^2}\right|_{K=S_t}$$

由公式（3.6），我们有：

$$\begin{aligned}\nu_{K,T}\left(t\right)&=\mathbb{E}^{G_t}\left[\sigma_t^2\right]\\&=\mathbb{E}^{P}\left[\sigma_t^2\frac{\mathrm{d}\mathbb{G}_t}{d\mathbb{P}}\right]\\&=\int \mathrm{d}S_t q\left(S_t;S_0,K,T\right)\mathbb{E}^{P}\left[\sigma_t^2\middle|S_t\right]\\&=\int \mathrm{d}S_t q\left(S_t;S_0,K,T\right)\nu_L\left(S_t,t\right)\end{aligned}\qquad(3.7)$$

其中，我们定义：

$$q\left(S_t,t;S_0,K,T\right):=\frac{p\left(S_t,t;S_0\right)S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t\right)}{\mathbb{E}\left[S_t^2\Gamma_{BS}\left(S_t\right)\middle|\mathcal{F}_0\right]}$$

另外，$\nu_L\left(S_t,t\right)=\mathbb{E}^{P}\left[\sigma_t^2\middle|S_t\right]$表示局部方差。

我们注意到，q（S_t，t；S_0，K，T）看起来很像股票价格的布朗桥密度，在0时刻p（S_t，t；S_0）是一个在S_0达到峰值的δ函数，在T时刻Γ_{BS}（S_t）是在执行价格K处达到峰值的δ函数。

为了后面计算方便，我们将公式（3.7）改写成关于x_t：=log（S_t/S_0）的式子：

$$\nu_{K,T}\left(t\right)=\int \mathrm{d}x_t q\left(x_t,t;x_T,T\right)\nu_L\left(x_t,t\right)\qquad(3.8)$$

图 3.1 展示了一年到期、在值状态为 1.3、波动率恒为 20%的欧式期权的q（x_t，t；x_T，T）的形态。我们可以看到，不同时刻的q（x_t，t；x_T，T）的峰值在一条线上，我们用$\tilde{x}_t$来表示这条线，这条线连接了0时刻股票现价对应的点和到期时刻T执行价格K对应的点。此外，密度函数的形态大致是关于峰值对称的。在峰值对应的线$\tilde{x}_t$上，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

q（x_t，t；x_T，T）关于x_t的导数是零，我们可以在峰值对应的线$\tilde{x}_t$附近对q（x_t，t；x_T，T）进行展开：

$$q\left(x_t,t;x_T,T\right)\approx q\left(\tilde{x}_t,t;x_T,T\right)+\frac{1}{2}\left(x_t-\tilde{x}_t\right)^2\frac{\partial^2 q}{\partial x_t^2}\bigg|_{x_t=\tilde{x}_t} \tag{3.9}$$

实际中，在q（x_t，t；x_T，T）的值比较显著的区域内，局部方差v_L（x_t，t）与x_t几乎呈线性关系，所以我们可以将局部方差展开为：

$$\nu_L\left(x_t,t\right)\approx\nu_L\left(\tilde{x}_t,t\right)+\left(x_t-\tilde{x}_t\right)\frac{\partial\nu_L}{\partial x_t}\bigg|_{x_t=\tilde{x}_t} \tag{3.10}$$

将（3.9）式和（3.10）式代入（3.8）的积分中，我们得到：

$$\nu_{K,T}\left(t\right)\approx\nu_L\left(\tilde{x}_t,t\right)$$

这样，我们就可以将公式（3.5）改写成：

$$\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2\approx\frac{1}{T}\int_0^T\nu_L\left(\tilde{x}_t\right)\mathrm{d}t \tag{3.11}$$

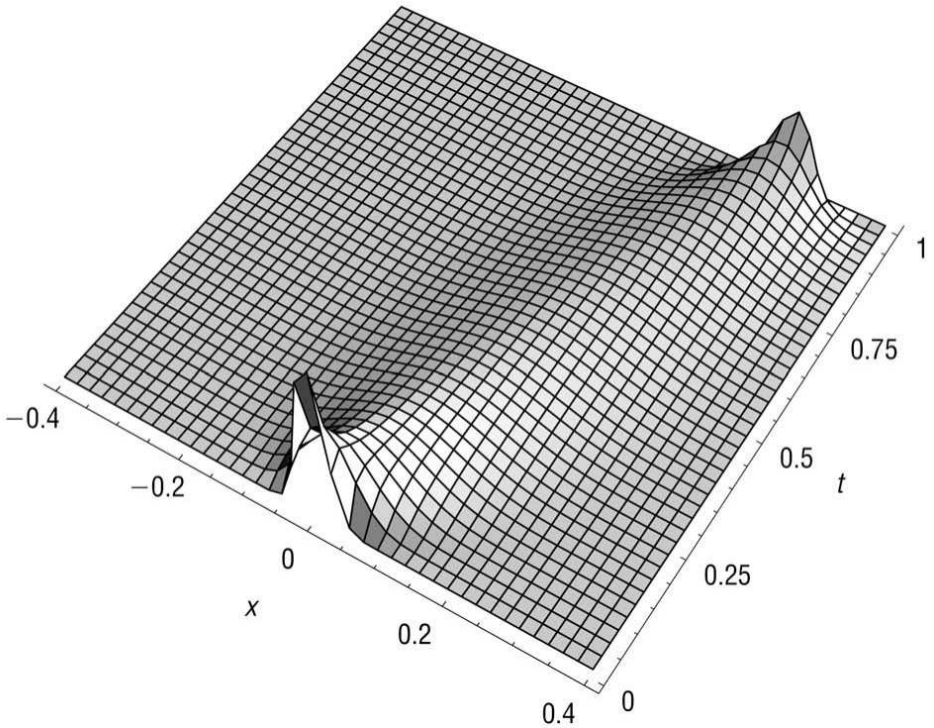


图3.1 股票现价为1、波动率为20%时，对于到期日为一年、行权价为1.3的期权，给定x_T=log（K）的条件下，x_t的密度函数图

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

说得通俗一点，公式（3.11）的意思是，一个执行价格为K的看涨期权的Black-Scholes隐含波动率近似地等于局部方差沿着路径$\tilde{x}_t$的、从估值时刻（t=0）到到期时刻（t=T）的积分，任意时刻，布朗桥密度q（x_t，t；x_T，T）在$\tilde{x}_t$达到峰值。当然，在实际应用中，很难计算出路径$\tilde{x}_t$。不然的话，对于一个给定执行价格和到期日的欧式期权，它的Black-Scholes隐含方差就有了一个非常简单、直观的表示：它近似地等于，给定股票价格在到期日等于期权执行价格的条件下，局部方差沿着股票价格“最有可能经过的路径”从当前时刻到到期日的积分。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

3.2 Heston模型的局部波动率

在随机微分方程（2.1）和（2.2）中，令x_t：=log （S_t /K）、μ=0，我们得到：

$$\mathrm{d}x_t = -\frac{\nu_t}{2}\mathrm{d}t + \sqrt{\nu_t}\,\mathrm{d}Z_t$$

$$\mathrm{d}\nu_t = -\lambda\left(\nu_t - \bar{\nu}\right)\mathrm{d}t + \rho\eta\sqrt{\nu_t}\,\mathrm{d}Z_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\eta\sqrt{\nu_t}\,\mathrm{d}W_t \qquad (3.12)$$

其中dZ $_t$和dW$_t$是正交的。消掉$\sqrt{\nu_t}\,\mathrm{d}Z_t$这一项，我们得到：

$$\mathrm{d}\nu_t = -\lambda\left(\nu_t - \bar{\nu}\right)\mathrm{d}t + \rho\eta\left(\mathrm{d}x_t + \frac{1}{2}\nu_t\mathrm{d}t\right) + \sqrt{1-\rho^2}\,\eta\sqrt{\nu_t}\,\mathrm{d}W_t \qquad (3.13)$$

我们的策略是，先在Heston模型下算出局部方差，然后按照公式（3.11），用局部方差从估值日到到期日的积分作为BS隐含方差的近似值。

首先，考虑瞬时方差在s时刻的非条件期望$\hat{\nu}_s$，通过求解随机微分方程（3.13）我们得到：

$$\hat{\nu}_s = \left(\nu_0 - \bar{\nu}\right)\mathrm{e}^{-\lambda s} + \bar{\nu}$$

其次，我们用下面的式子定义从估值时刻到t时刻的期望总方差：

$$\hat{\omega}_t := \int_0^t \hat{\nu}_s\mathrm{d}s = \left(\nu_0 - \bar{\nu}\right)\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}\right\} + \bar{\nu}t$$

最后，令μ$_t$：=E［ν_t|x_T］为t时刻给定到期时刻股票价格的对数x为x_T（期权执行价格的对数）的条件下瞬时方差的条件期望。

拟设

“拟设”的意思就是：“让我们假设这个条件是成立的，然后再进行后面的步骤。”不失一般性，假设x_0=0。我们有：

$$\mathbb{E}\left[x_s \mid x_T\right] = x_T\frac{\hat{\omega}_s}{\hat{\omega}_T}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

其中，$\hat{\omega}_t := \int_0^t ds\hat{v}_s$ 为从估值时刻到t时刻的期望总方差。为了证明这个假设是一个合理的近似，我们注意到：

$$\mathbb{E}(x_s) = \mathbb{E}(x_T)\frac{\hat{\omega}_s}{\hat{\omega}_T} = -\frac{\hat{\omega}_T}{2}\frac{\hat{\omega}_s}{\hat{\omega}_T} = -\frac{\hat{\omega}_s}{2}$$

实际上，如果x_t的过程服从常规的布朗桥过程，这个结果就是正确的；但是在这里，这只是一个近似的假设，只有当$|x_T|$的值很小的时候（即，T时刻的股票价格在在值状态附近）才是合理的。

在这个假设的基础上，我们对随机微分方程（3.13）取条件期望：

$$\begin{aligned} d\mu_t &= -\lambda(\mu_t - \bar{v})dt + \frac{\rho\eta}{2}\mu_t dt + \rho\eta\frac{x_T}{\hat{\omega}_T}d\hat{\omega}_t \\ &\quad + \sqrt{1-\rho^2}\eta\mathbb{E}\left[\sqrt{v_t}dW_t \mid x_T\right] \end{aligned} \qquad (3.14)$$

如果dW_t对x_T的以来较弱或者$\sqrt{1-\rho^2}$的值较小，我们可以忽略最后一项，得到下式：

$$d\mu_t \approx -\lambda'(\mu_t - \bar{v}')dt + \rho\eta\frac{x_T}{\hat{\omega}_T}\hat{v}_t dt$$

其中，$\lambda' = \lambda - \rho\eta/2$，$v' = v\lambda/\lambda'$。上述随机微分方程的解为：

$$\mu_T \approx \hat{v}'_T + \rho\eta\frac{x_T}{\hat{\omega}_T}\int_0^T \hat{v}_s e^{-\lambda'(T-s)}ds \qquad (3.15)$$

其中，$\hat{v}'_s := (v - \bar{v}')e^{-\lambda' s} + \bar{v}'$。

由公式（1.12），我们知道局部方差σ^2（K，T，S_0）=E[v_T |S_T =K]。公式（3.15）给出了Heston模型下局部方差的估计式，这个估计式出奇地精确（当ρ=±1时，这个估计式非常精确）。我们可以观察到，在Heston模型下局部方差与$x = \log\left(\frac{F}{K}\right)$近似地呈线性关系。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

总结一下，在这里我们做了两次近似：假设条件以及对（3.14）式最后一项的省略。对适当的参数，（3.15）式给出了局部方差的近似表示；我们会在第4章中看到，尤其是在ρ=±1时，这个表达式几乎就是精确的。Peter Friz证明了：无论我们之前做的假设是否成立、$\sqrt{1-\rho^2}$的值是不是足够小，（3.15）式对η都是一阶精确的。鉴于这一点，可以证明（3.15）式与Lewis（2000）的一般性扰动展开（General Perturbative Expansions）是吻合的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

3.3 Heston模型的隐含波动率

现在，如果我们想按照之前总结的公式（3.11）计算Heston模型的隐含波动率，需要沿着股票价格“最有可能经过的路径”对局部方差进行积分，这条路径连接了0时刻股票现价对应的点和到期时刻T执行价格K对应的点（在这条路径上类似布朗桥过程的概率密度函数达到最大值）。

用我们之前定义的符号，Black-Scholes隐含方差由下面的式子给出：

$$\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2 \approx \frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2_{\tilde{x}_t,t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \mu_t\left(\tilde{x}_t\right)\mathrm{d}t \qquad (3.16)$$

其中，$\tilde{x}_t$是我们之前定义的股票价格“最有可能经过的路径”。

我们前面提到，布朗桥密度q（x_t，t；x_T，T）几乎是对称的、且在$\tilde{x}_t$附近达到峰值，所以有$\mathbb{E}\left[x_t - \tilde{x}_t \mid x_T\right] \approx 0$。再次使用之前的拟设，我们得到：

$$\tilde{x}_t = \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t \mid x_T\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{x}_t - x_t \mid x_T\right] + \mathbb{E}\left[x_t \mid x_T\right] \approx \frac{\hat{\omega}_t}{\hat{\omega}_T}x_T$$

我们将这个表达式代入公式（3.15）、（3.16）中得到：

$$\begin{aligned}\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2 &\approx \frac{1}{T}\int_0^T \mu_t\left(\tilde{x}_t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \hat{\nu}'_t\mathrm{d}t + \rho\eta\frac{x_T}{\hat{\omega}_T}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\int_0^t \hat{\nu}_s \mathrm{e}^{-\lambda'(t-s)}\mathrm{d}s\end{aligned} \qquad (3.17)$$

Heston模型下Black-Scholes隐含波动率的期限结构

在公式（3.17）中令x_T =0，我们就得到 Heston 模型下 BS 隐含方差的在值期限结构，将积分明确地算出来：

$$\begin{aligned}\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2 \mid_{K=F_T} \approx \frac{1}{T}\int_0^T \hat{\nu}'_t\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\left(\nu-\bar{\nu}'\right)\mathrm{e}^{-\lambda' t} + \bar{\nu}'\right]\mathrm{d}t \\ &= \left(\nu-\bar{\nu}'\right)\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda' T}}{\lambda' T} + \bar{\nu}'\end{aligned} \qquad (3.18)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

根据这个式子我们可以看出，在 Heston 模型下，当T→0时，在值状态的Black-Scholes隐含方差有下面的渐进性：

$$\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2 |_{K=F_T} \to \nu$$

当T→∞时，在值状态的Black-Scholes隐含方差趋近于ν′ 。

Heston模型下Black-Scholes隐含波动率的倾斜

公式（3.17）第二项中的积分可能会有显式的结果（但是不一定）。即使没有算出第二项中的积分的显式结果，我们也可以看到Heston模型下隐含方差的倾斜程度与相关性系数ρ、波动率的波动率η呈近似的线性关系。

令$\nu_0 = \bar{\nu}$，在这种特殊情况下，隐含方差的倾斜程度的形式特别简单。根据之前的式子，我们有$\hat{\nu}_s = \bar{\nu}$，$\hat{\omega}_t = \bar{\nu}t$。股票价格“最可能经过的路径”$\tilde{x}_t \approx \frac{t}{T}x_T$，在对数空间中，它刚好是一条连接0时刻股票现价对应的点和到期时刻T执行价格K对应的点的一条直线。继续计算公式（3.17）中的积分，我们得到：

$$\begin{aligned}\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2 &\approx \frac{\hat{\omega}'_T}{T} + \rho\eta\frac{x_T}{T^2}\int_0^T \mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda'(t-s)}\mathrm{d}s \\ &= \frac{\hat{\omega}'_T}{T} + \rho\eta\frac{x_T}{\lambda' T}\left\{1 - \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda' T}\right)}{\lambda' T}\right\}\end{aligned} \qquad (3.19)$$

从公式（3.19）可以看出，隐含方差的倾斜程度$\frac{\partial}{\partial x_T}\sigma_{BS}$（K，T）^{2}与瞬时方差$\nu_0$和方差的长期均值$\bar{\nu}$的水平是独立的。实际上，这个结论即使是在$\nu_0 \neq \bar{\nu}$的情况下也几乎是对的。这样，我们就可以快速地从观测到的隐含波动率倾斜程度的数据校正出Heston模型的参数。原则上我们只需要两个期限的数据就可以确定参数λ′ 和乘积ρη。然后，我们可以通过拟合波动率的期限结构来确定方差的长期均值$\bar{\nu}$和瞬时方差ν_0。最后，可以用波动率曲线的曲率确定ρ和η分别的值（在这里不讨论）。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

我们注意到，提高相关性系数 ρ 或波动率的波动率 η 的值都会使波动率曲线的倾斜程度变大。

另外，短期的波动率曲线的倾斜程度与 λ 和T无关：

$$\frac{\partial}{\partial x_t}\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2=\rho\eta\frac{1}{\lambda' T}\left\{1-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda' T}\right)}{\lambda' T}\right\}\to\frac{\rho\eta}{2}\text{，当}T\to 0\text{时}$$

长期的波动率曲线的倾斜程度与T成反比：

$$\frac{\partial}{\partial x_t}\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2=\rho\eta\frac{1}{\lambda' T}\left\{1-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda' T}\right)}{\lambda' T}\right\}\sim\frac{\rho\eta}{\lambda' T}\text{，当}T\to\infty\text{时}$$

最后， η 的值提高会增加隐含波动率曲线的曲率（与风险中性概率密度的峰度有关），但是，关于这一点在这里我们不做说明。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

3.4 标准普尔500指数期权的隐含波动率曲面

到目前为止，我们一直将精力集中在理解随机波动率模型——尤其是Heston模型——所生成的隐含波动率曲面的形态上。然而，我们并不清楚Heston模型生成的隐含波动率曲面的形态与市场实际的隐含波动率曲面的形态是否相同。

为了更好地观察隐含波动率曲面的实际形态，图 3.2 给出了用一个关于对数执行价格k的非线性函数（SVI）对每个期限的隐含方差数据进行拟合所得到的曲面，数据是当年9月的三权到期日[2]的前一天——2005年9月15日——的数据。

题外话：SVI参数化形式

Gatheral（2004）一文中给出了隐含波动率微笑的一种参数化形式，称之为“随机波动率激发的”（SVI）参数化形式。对于每个到期日，我们将不同的对数执行价格对应的隐含方差表示为：

$$\sigma_{BS}^2(k) = a + b\left\{\rho(k-m) + \sqrt{(k-m)^2 + \sigma^2}\right\} \qquad (3.20)$$

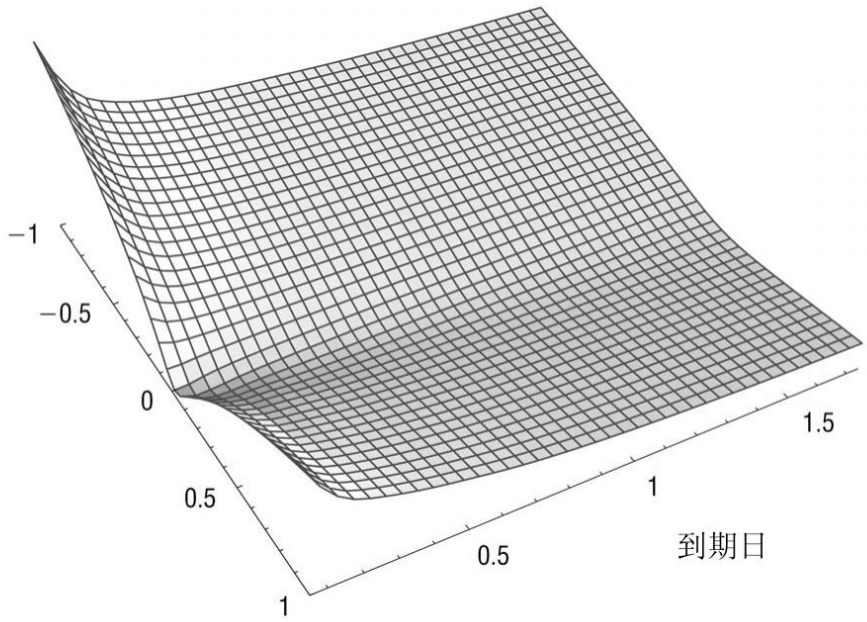


图3.2 2005年9月15日收盘时，标准普尔500指数期权波动率曲面图，“三巫日”（Triple Witching）前一天

其中，参数a、b、 ρ 、 σ 和m都是依赖于到期日的。

这个参数化形式有一些吸引人的性质，其中一点是利用这种参数化形式相对来说比较容易消除垂直价差套利（Calendar Spread

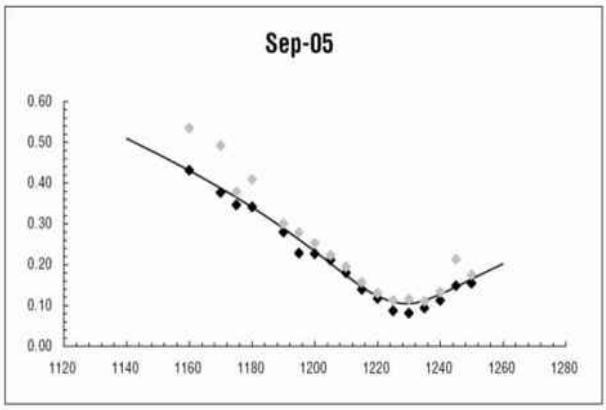
全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

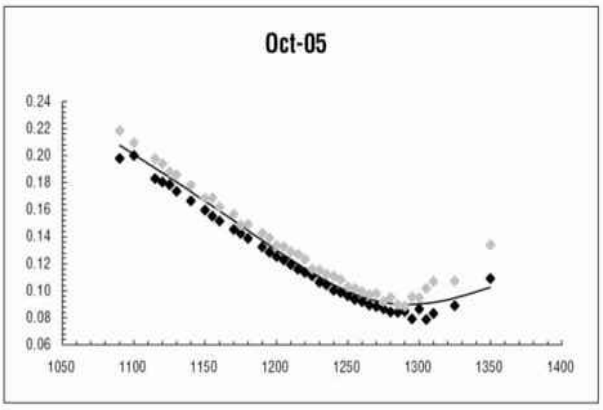
Arbitrage）。因此，在使用SVI进行数据拟合时，所有到期日对应的数据都在一个排除不同期限之间存在套利机会的限制条件下同时进行拟合。随后，我们会对不同期限的总隐含方差进行插值，得到一张光滑的曲面。对时间方向进行插值时，我们会用到Stineman单调样条插值法（Stineman 1980）。

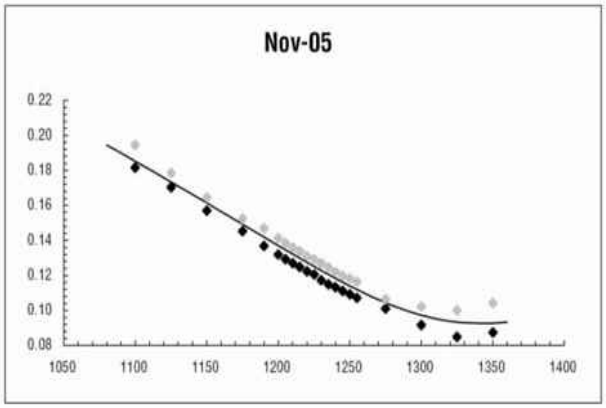
有些读者可能会怀疑图3.2是不是很好地描述了隐含波动率曲面真实的形态，我们在图3.3中给出了SVI参数化形式对每个期限的隐含波动率的拟合情况，供大家参考。

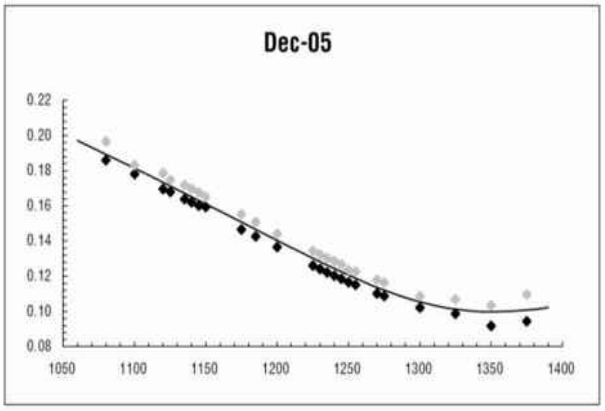
根据SVI参数化形式对市场数据的拟合结果，我们归纳出不同到期日对应的隐含波动率曲线上在值状态的远期方差水平和倾斜程度，并将其列入表3.1中（在值状态的隐含波动率曲线倾斜程度是指 $\frac{\partial}{\partial k}\sigma_{BS}\left(k,T\right)^2$，其中k是对数执行价格）。在图 3.4 中画出了倾斜程度关于时间的函数。通过观察数据点的分布情况，我们可以判断用一个简单的函数就可以拟合这些数据点。图中的实线和虚线都是用下面的函数对倾斜程度数据进行拟合的结果：

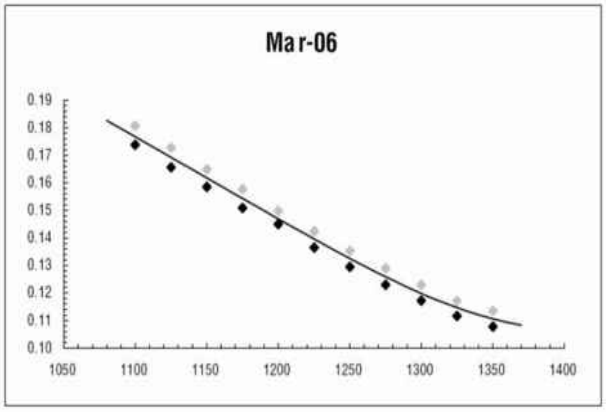
全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

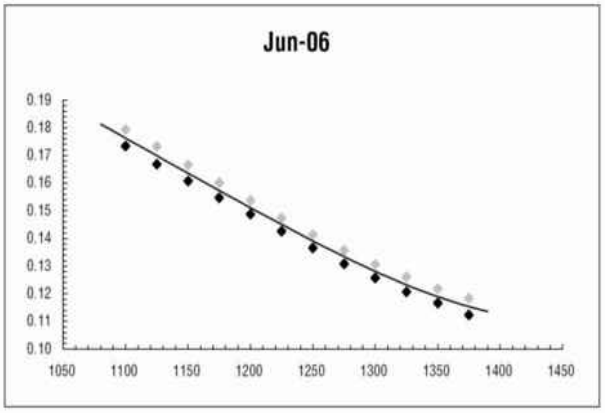


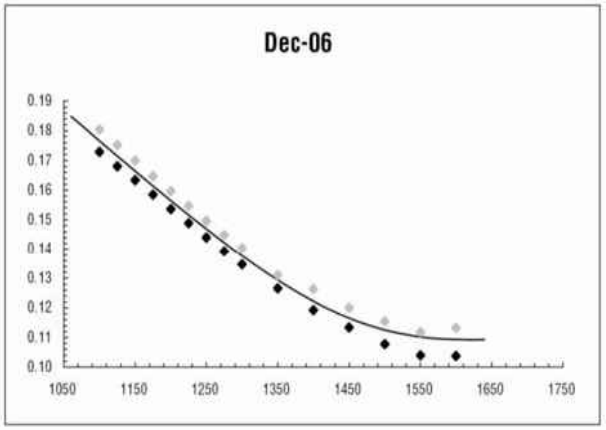


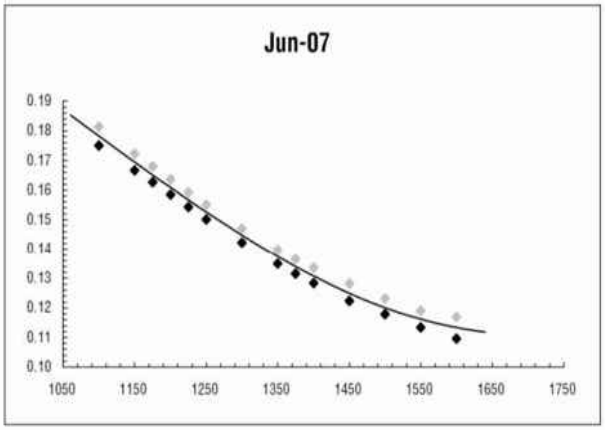












全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

图3.3 2005年9月15日所有8个到期日对应的标准普尔500指数期权隐含波动率散点图。x轴代表行权价，y轴代表隐含波动率。黑色和灰色的方块分别代表买价和卖价的波动率，实线是SVI拟合的波动率曲线

表3.1 到期日前一天，2015年9月15日收盘前，标准普尔500指数期权的在值方差和在值波动率倾斜

收盘日	到期日	在值方差	在值波动率倾斜
Sep-05	1 天	0.0109	−0.0955
Oct-05	1 个月	0.0123	−0.1601
Nov-05	2 个月	0.0149	−0.1372
Dec-05	3 个月	0.0161	−0.1221
Mar-06	6 个月	0.0183	−0.0945
Jun-06	9 个月	0.0195	−0.0815
Dec-06	15 个月	0.0209	−0.0679
Jun-07	21 个月	0.0220	−0.0594

$$\rho\eta\frac{1}{\lambda' T}\left\{1-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda' T}\right)}{\lambda' T}\right\} \tag{3.21}$$

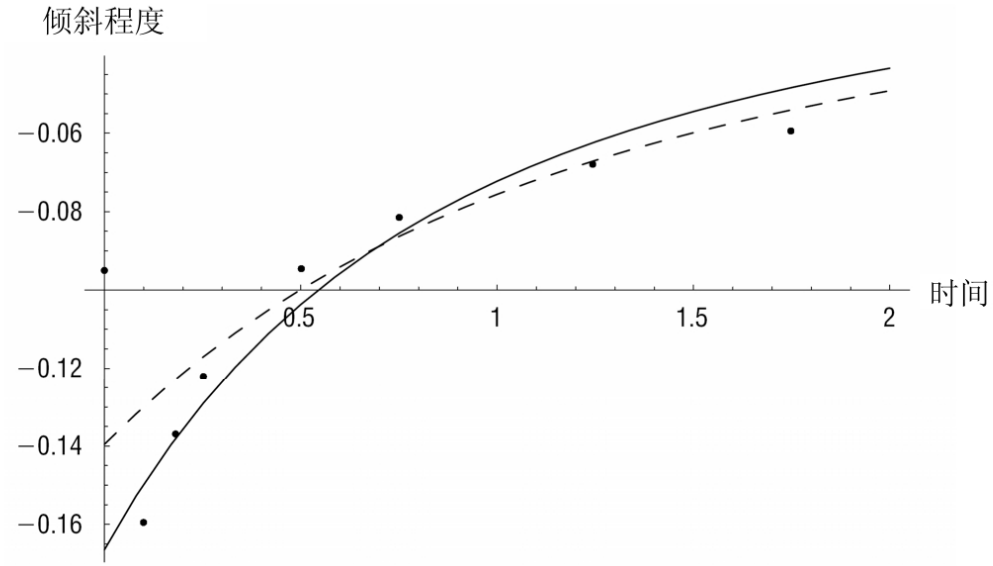


图3.4 标准普尔500指数期权不同到期日对应的在值波动率倾斜与到期日的对应关系。实线是近似波动率倾斜公式（3.21）对除第一个点外所有点的拟合情况

实线是考虑了所有数据点的拟合结果；虚线是去除了前三个到期日的数据点后的拟合结果。我们发现，这个拟合函数太呆板了，没有办法刻画方差曲线的倾斜程度的实际情况，无论我们如何选择λ′，都没有办法完全拟合倾斜程度的实际数据。当T→0时，实际中方差曲线在值状态的斜率增速要比随机波动率模型刻画的斜率增速大很多。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

这就说明，我们需要在模型中引入“跳”（jump），这将在第5章中进行讨论。

从图3.5中可以看到，我们的模型对选定日期的数据的拟合效果是非常好的。但是需要强调的是，实际中数据的形态并非总是这个样子；一般情况下，短期的波动率期限结构都是很复杂的。

$$\sigma_{BS}\left(K,T\right)^2 |_{K=F_T} \approx \left(\nu-\bar{\nu}'\right)\frac{1}{\lambda' T}\left\{1-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda' T}\right)}{\lambda' T}\right\}+\bar{\nu}'$$

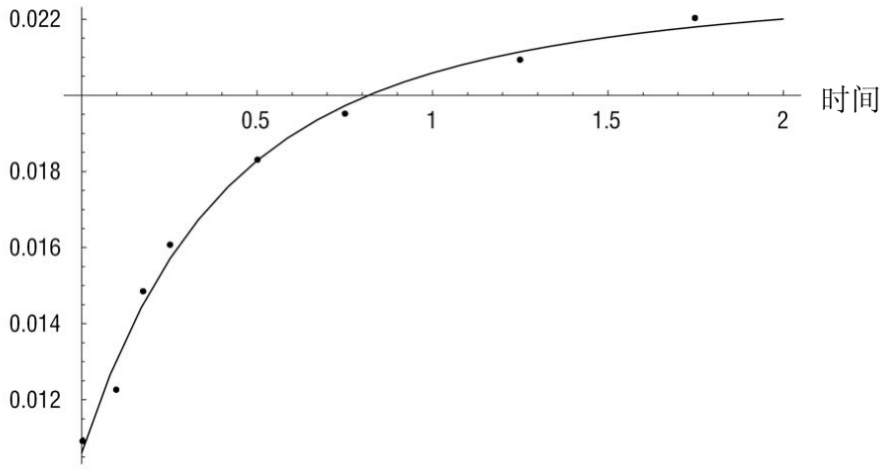


图3.5 标准普尔500指数期权不同到期日对应的在值期权的方差与到期日的对应关系。实线是近似在值期权方差公式（3.18）对所有点的拟合情况

所以，有时候用随机波动率模型拟合在值状态的波动率期限结构是可能的，但是随机波动率模型永远都没办法拟合波动率曲线的斜率的短期部分。这也是业界工作者更喜欢使用局部波动率模型的一个原因，因为参数时齐的（Time-Homogeneous Parameters）随机波动率模型没有办法与市场价格数据吻合！Matytsin （1999）提出了一种扩展的随机波动率模型，他在股价过程和波动率过程中引入了相关的跳，也许这种模型可以对市场数据有更好的拟合效果。但是，在使用这种模型时，交易员应该如何选择输入的参数？标准普尔 500 指数期权的交易员应该如何选择波动率的波动率？更棘手的是，如何选择股价的跳和波动率的跳的相关性系数？

Heston模型对数据的拟合情况

我们用Heston模型拟合图3.2中给出的2005年9月15日的波动率曲面，并在表3.2中列出了通过拟合曲面得到的模型参数。在这一天，Heston模型的参数与BBC模型的参数差距不大。这并不是一般情况，一

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

般情况下Heston模型的参数随时间变化很慢。举个例子，Heston模型中，波动率的波动率 η 会随着波动率的整体水平升高而增大。

表3.2 Heston模型拟合2015年9月15日收盘前标准普尔500指数波动率曲面的结果

v	0.0174
$\overline{v}$	0.0354
η	0.3877
ρ	−0.7165
λ	1.3253

如果我们想评价Heston模型对实际的隐含波动率曲面的拟合效果，一个好办法就是将两张曲面在同一张图中画出来进行比较。图3.6 显示，相比于实际的隐含波动率曲面，Heston模型生成的隐含波动率曲面过于平坦。但是，对于长期的部分，拟合效果还是不错的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

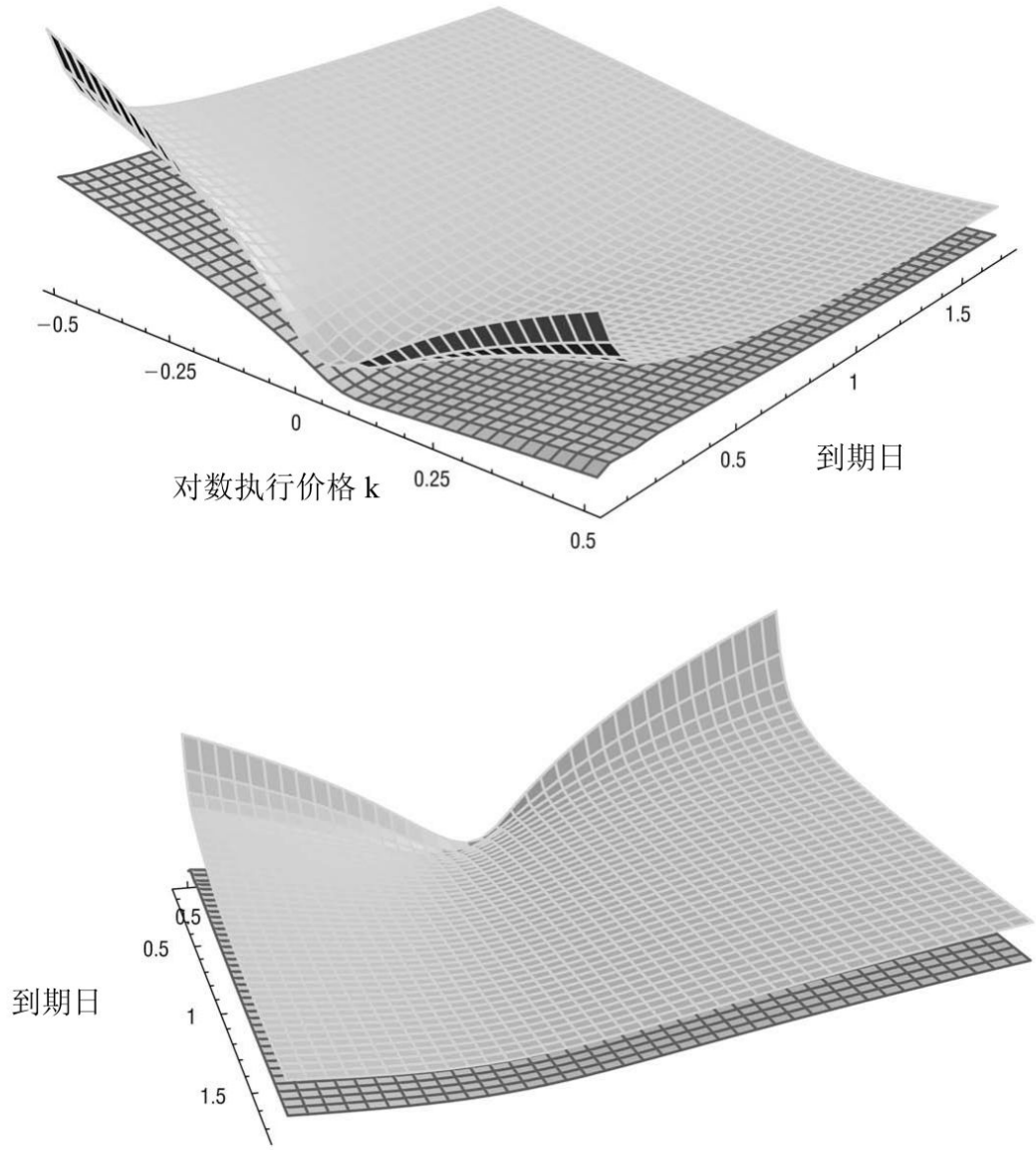


图3.6 实际中观察到的曲面与Heston模型拟合2005年9月15日数据得到的曲面的对比。从两个角度观察两张曲面的情况，我们发现，Heston模型对到期日长的波动率拟合较好，在短期的效果不尽如人意。上面一张颜色较浅的是市场上观测到的标准普尔500指数隐含波动率曲面，下面颜色较深的一张是Heston模型拟合的曲面。为了方便观察，Heston模型拟合的曲面被整体向下平移了5个点

总结：随机波动率模型及其对隐含波动率曲面的拟合效果

图3.4和图3.6告诉我们，虽然Heston模型对实际观察到的隐含波动率曲面的长期部分的拟合效果不差，但它没办法对短期部分进行很好的拟合。我们在第7章中会告诉大家，所有的随机波动率模型产生的波动率曲面的形态都大致相同。也就是说，如果我们想找到能够更好地拟合市场数据的模型，需要考虑随机波动率模型之外的其他模型。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

[1]根据资产组合复制的原理，我们可以通过动态交易标的资产和货币账户复制期权的收益，期权的价格应该等于组合构建成本。

[2]三权到期日是指股价指数期货合约、股价指数期权及个股期权同时到期的日子。这种情形每季发生一次，常令股市的波动性显着升高，尤其是美国股市。美国的三权到期日为3月、6月、9月和12月的第三个周五。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第4章 Heston-Nandi模型

第3章中，我们在Heston模型下推导出了局部波动率和隐含波动率的近似表达式。在这一章中，我们给定了Heston模型的一组参数，并计算该模型下的局部波动率和隐含波动率，在这组参数下（3.5）对实际的局部方差给出了非常好的近似。这组参数确保了Heston模型和局部波动率模型下的欧式期权价格几乎是一致的，在后面的章节中，我们可以用Heston模型的这组参数和局部波动率作为参照，研究模型假设对不同品种的期权定价的影响。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

4.1 Heston-Nandi模型的局部方差

根据第3章的推导过程，我们知道如果令 ρ =-1，局部方差的公式就更加完美了（排除了一些假设误差）。在这种情况下，因为 ρ =-1，Heston 模型的过程中只剩下一个因子，随机微分方程可以写为：

$$\mathrm{d}x = -\frac{v}{2}\mathrm{d}t + \sqrt{v}\mathrm{d}Z$$

$$\mathrm{d}v = -\lambda\left(v - \bar{v}\right)\mathrm{d}t - \eta\sqrt{v}\mathrm{d}Z$$

Heston 和 Nandi（1998）最先研究了 ρ =-1的情况，他们之前提出了一种离散的GARCH期权定价模型， ρ =-1的Heston模型可以看作是离散模型的、无风险偏好的连续时间极限形式。之所以说这个模型是无风险偏好的，是因为这种情况下只存在一个随机源。所以，所有的波动率风险都可以通过用股票进行适当的Delta对冲消除掉，这样就没有波动率风险溢价了。

虽然在这种特殊情况下Heston模型只有一个因子，股票价格依然不是马尔科夫过程。这是因为，瞬时波动率是整个股票价格历史走势的确定函数，而且在一般情况下，计算风险中性测度下的期望需要用到波动率的信息。为了更清楚地说明这一点，我们将 v 的随机微分方程改写为：

$$\mathrm{d}v = -\lambda'\left(v - \bar{v}'\right)\mathrm{d}t - \eta\mathrm{d}x$$

其中， $\lambda' = \lambda + \eta/2$， $\bar{v}' = \bar{v}\lambda/\lambda'$ 。需要注意的一点是，参数取某些值的情况下瞬时方差的值可以达到零，但是绝对不可能为负。特别地，局部方差永远不可能为负。

根据公式（3.15），在这个特殊情况下局部方差为：

$$\begin{aligned} v_{loc}\left(x_T, T\right) &= \hat{v}'_T - \eta\frac{x_T}{\hat{\omega}_T}\int_0^T \hat{v}_s \mathrm{e}^{-\lambda'(T-s)}\mathrm{d}s \\ &= \left(v - \bar{v}'\right)\mathrm{e}^{-\lambda' T} + \bar{v}' - \eta x_T\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda' T}}{\lambda' T}\right\} \end{aligned} \qquad (4.1)$$

上述表达式的下界为零，股票价格在某一临界值时局部方差为零，股票价格没有办法超过临界值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

4.2 数值例子

为了评估局部方差近似公式（3.15）的精确程度，同时研究Heston-Nandi 模型的一些性质，我们将Heston模型的参数固定为：

$$\begin{aligned} \nu_0 &= 0.04 \\ \bar{\nu} &= 0.04 \\ \lambda &= 10 \\ \eta &= 1 \\ \rho &= -1 \end{aligned} \qquad (4.2)$$

我们在后文关于Heston模型的计算中会反复用到这组参数。

Heston-Nandi密度

为了得到Heston-Nandi模型下给定到期日T的概率密度函数p（k，T），我们对Heston的特征函数求逆：

$$p(k,T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \phi_T(u) \mathrm{e}^{-iuk}$$

其中，

$$\phi_T(u) = \exp\left\{C(u,\tau)\bar{\nu} + D(u,\tau)\nu\right\}$$

参考公式（2.15）。

我们结合前面给定的参数，通过数值积分计算出T=0.1年对应的概率密度函数p（k，T），图4.1给出了该概率密度函数的图形。从图形中可以明显地看出，在Heston-Nandi 模型下，股票无法超过某一临界值。这样一来话，执行价格在某一临界值之上的看涨期权的价格都应该为零。单纯从这一点就可以看出Heston-Nandi模型不符合实际情况。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

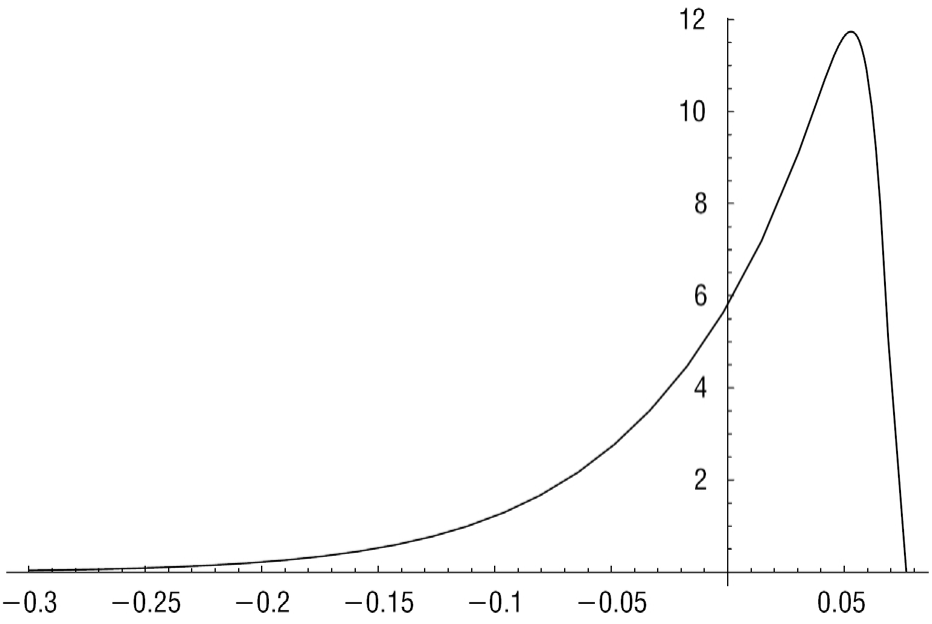


图4.1 到期日T=0.1，参数为我们选取的参数时，Heston-Nandi模型下的概率密度函数

局部波动率的计算

第3章中，公式（1.4）给出了计算局部方差（局部波动率的平方）的Dupire公式，其中，局部方差是水平价差（关于时间的导数）和蝶式套利组合（概率密度函数）的比。我们已经得到了概率密度函数p（k，T），现在只要算出水平价差就可以了。我们可以通过对Heston模型下的看涨期权价格公式求关于剩余到期日 τ 的导数。由公式（2.5），我们得到：

$$\partial_\tau C(x,\nu,\tau) = K\left\{e^x \partial_\tau P_1(x,\nu,\tau) - \partial_\tau P_0(x,\nu,\tau)\right\}$$

其中，P_j（•）由公式（2.13）给出。

对公式（1.4）做一些变换得到：

$$\nu_{loc}(x_t,\tau) = 2\frac{\partial_\tau c(x_t,\tau)}{p(k,\tau)} \qquad (4.3)$$

其中，

$$c(x,\tau) := \frac{C(x,\nu,\tau)}{K}$$

我们分别用精确的（但是可能在数值计算时存在误差）公式（4.1）和近似的（但是数值计算时是精确的）公式（4.3）计算了Heston-Nandi模型下的局部方差，并将计算结果在图4.2中画出。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

计算隐含波动率

从图 4.2 中可以看出，用近似公式和精确公式计算出的局部方差结果非常接近，但是这个结果可能难以让读者信服。因为，我们不知道执行价格较低时的误差是来源于近似公式的不准确性还是用精确公式计算局部方差时数值算法的不准确性。

要评价一个布丁好不好，最好的办法就是尝一下，我们现在需要的是看看欧式期权的价格是否吻合。因此，我们先用Heston模型的定价公式（2.13）计算欧式期权的价格，又结合（4.1）给出的局部方差，通过偏微分方程数值解法求解欧式期权的价格。明确地说，对于一个执行价格为K、到期日为T的期权，我们用数值方法求解下面的PDE[1]（偏微分方程）得到期权价格：

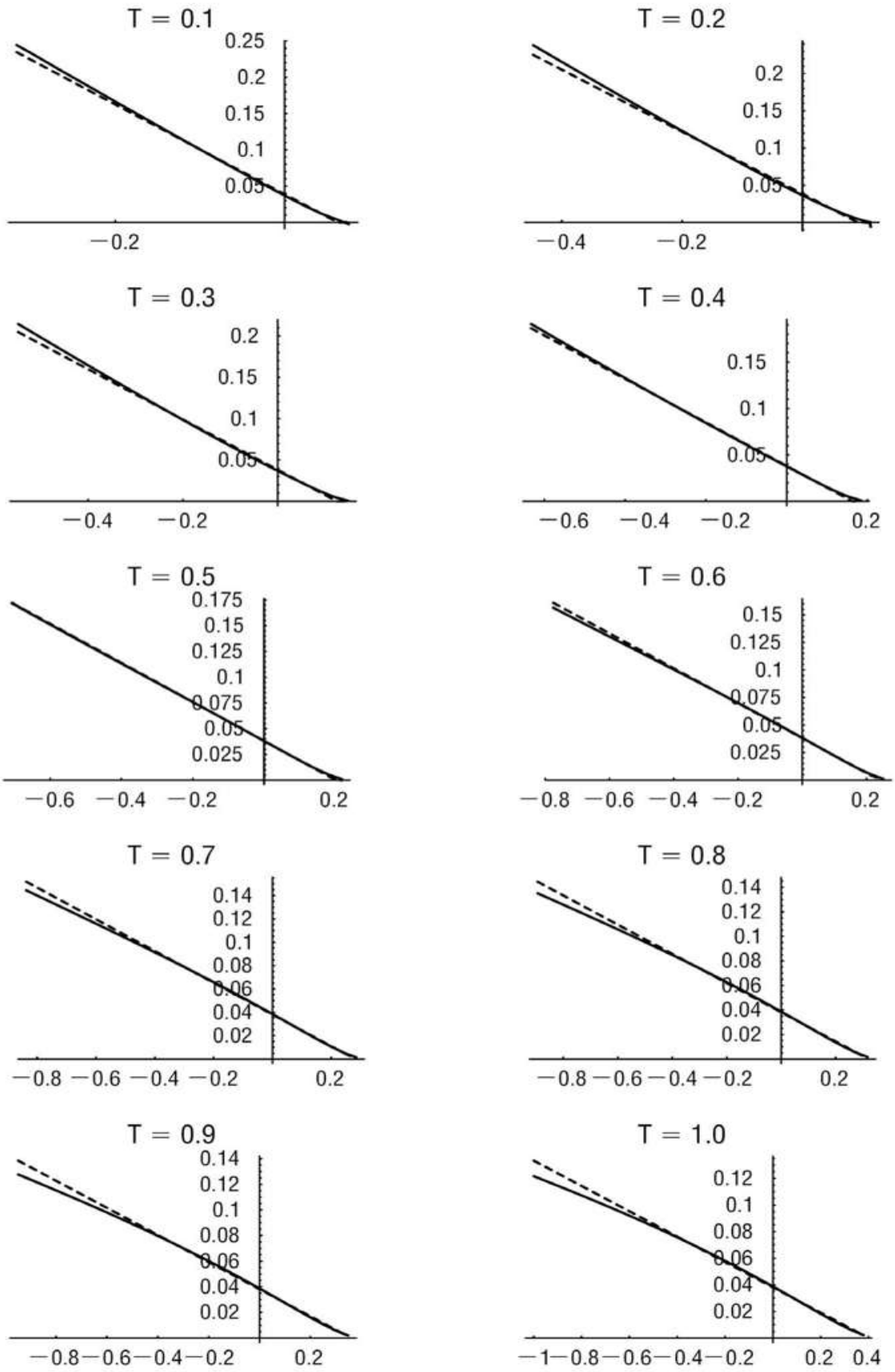
$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\nu(S,t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=0$$

边界条件为$V\ (S_T, T)=(S_T-K)^+$。由公式（4.1）可知：

$$\nu(S,t)=(\nu-\bar{\nu}')\mathrm{e}^{-\lambda' T}+\bar{\nu}'-\eta\log(S/S_0)\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda' T}}{\lambda' T}\right\}$$

我们在图 4.3 中展示了这两种方法的计算结果，发现两种方法得到的欧式期权价格也极其相似。

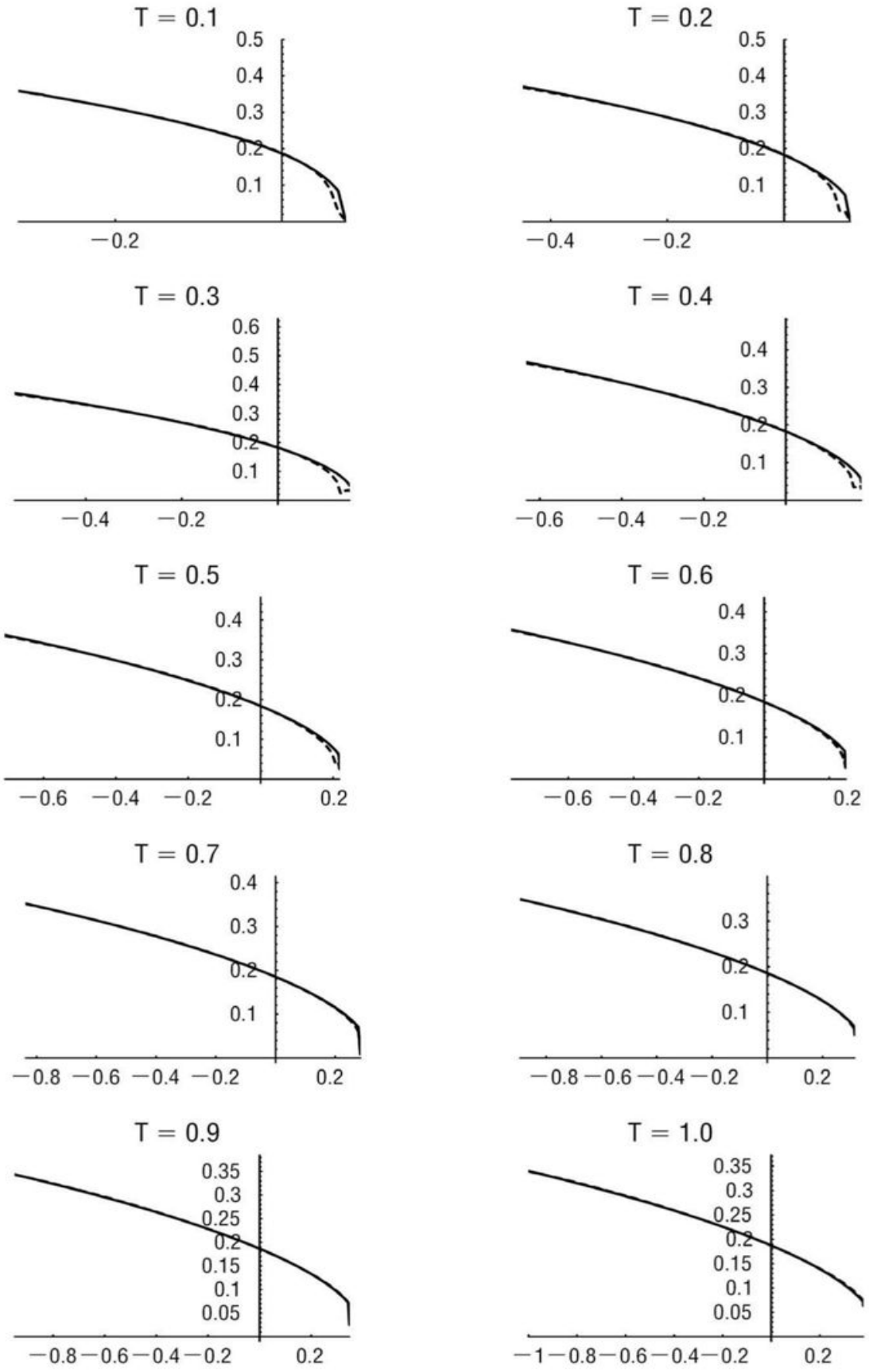
全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net



全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

图4.2 近似公式计算的局部方差与Heston模型下直接用数值算法算出的局部方差的对比。对于每个到期日T，实线是数值计算的结果，虚线是近似公式计算的结果

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net



全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

图4.3 对比由Heston公式（2.13）结合偏微分方程数值解法算出的隐含波动率和利用近似公式（4.1）给出的局部波动率算出的隐含波动率。对于每个到期日T，实线是数值计算的结果，虚线是近似公式的结果

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

4.3 结果讨论

从我们的计算结果来看，局部波动率模型和随机波动率模型得到的欧式期权定价几乎相等。这样，我们就得到了一组参照性的参数，并确定在这组参数下，随机波动率模型和局部波动率模型得到的欧式期权定价是相等的。后面我们就可以比较不同的模型假设——随机波动率模型或者说局部波动率模型——对不同产品定价的影响。另一个隐含的假设是，当我们进行比较的时候，任何定价结果的不同都归因于动态假设的不同，而不是参数选择的问题，这样就使得计算变得非常简便。

我们注意到，本章中给定参数后的Heston-Nandi模型和其对应的局部波动率模型都是单因子的，都只依赖于股票价格的变化。然而，这两个模型并非等价的。因为，在局部波动率模型中，波动率是提前知道的；而在随机波动率模型中，波动率是不确定的。在后面的章节中我们会介绍奇异期权的定价，到时候这两种模型基本假设的不同所带来的结果就显而易见了。

换言之，给期权（包括各种结构）定价时，单纯地拟合欧式期权价格数据是不够的，我们还需要知道标的资产的动态过程具体是什么。

---

[1]Tavella和Randall（2000）一书中全面地介绍了如何用数值求解PDE的方法求解期权定价问题。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第5章 引入跳过程

在本章中，首先解释为什么要在模型中引入“跳”。其次，介绍通常情况下如何对“跳”进行建模。我们会发现，引入“跳”过程对波动率曲面长期期权对应部分的形态几乎没有影响，对短期期权对应部分的形态影响较大。还会顺带给出SVJ模型和SVJJ模型的特征函数的显式公式，其中SVJ模型是很受欢迎的。相比于SVJJ模型，SVJ模型更胜一筹，是因为SVJ模型用更少的参数刻画了几乎全部实际中观察到的、波动率曲面的特征。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

5.1 为什么需要引入“跳”

在第3章中指出，跳的存在可以解释短期波动率曲线倾斜程度过大的问题，以及为什么波动率倾斜的短期期限结构与随机波动率模型不符。另外，表 5.1 的数据从另外一个角度解释了“跳”对于波动率曲面的必要性。2015年9月15日，标准普尔500指数为1227.73点，行权价格为1160点（虚值程度大概是67点）、第二天到期的看跌期权出价0.05元[1]。历史数据显示，标准普尔500指数的方差有40%来源于隔夜价格变化，而当时的在值波动率在10%左右。根据这些参数，67点的变化大概对应13.7个标准差。服从正态分布的随机变量产生这么大的变动的概率几乎为零（大概在小数点后40位）。0.05元只是期权的出价，实际成交价有可能是买卖价格之间的任何一个值。同样，行权价格为1250点（虚值程度大概23点）的看涨期权的出价也是0.05元。虽然23点的变化只对应了4.7个标准差左右，但是正态分布随机变量发生这样变化的概率也只是刚刚超过百万分之一。如果标的资产的动态过程中只有分散项（布朗运动对应的项），其服从的分布不足以使其在短期产生那么大的价格变动，那么短期的虚值期权也不会有任何价值。

短期虚值期权依然具有一定的价值，就要求标的资产价格在短时间内发生巨大的变化，这样虚值期权才可能在到期日时处于实值状态，这是标准普尔500指数期权市场极度倾斜的短期波动率微笑的另一种表现。从交易员的角度看，这个解释就更直接了：大幅度的价格波动确实有可能发生，所以买入虚值期权是有经济意义的——至少覆盖了现有的风险。

表5.1 2005年9月15日，2005年9月到期的期权临近到期日，后面一天就是“三巫日”，当日标准普尔500指数的值为1227.73

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

行权价格	看涨期权出价	看涨期权卖价	看跌期权出价	看跌期权卖价
1160	66.70	68.70	0.05	0.25
1170	56.70	58.70	0.05	0.35
1175	51.70	53.70	0.05	0.10
1180	46.70	48.70	0.10	0.30
1190	36.70	38.70	0.10	0.15
1195	31.70	33.70	0.05	0.20
1200	26.70	28.70	0.15	0.25
1205	21.70	23.70	0.25	0.30
1210	16.80	18.60	0.30	0.40
1215	11.90	13.70	0.30	0.45
1220	8.00	8.80	0.65	0.75
1225	3.90	4.20	1.10	1.90
1230	1.50	2.00	2.80	4.20
1235	0.35	0.50	6.70	8.30
1240	0.15	0.25	11.40	13.20
1245	0.15	0.70	16.40	18.00
1250	0.05	0.10	21.30	22.70

为了更具体地说明问题，我们在图5.1中同时画出了实际观察到的隐含波动率和Heston模型按照表3.1中9月5日的参数生成的隐含波动率曲线[2]。我们注意到，Heston模型生成的波动率曲线过于平坦，与实际观察到的波动率曲线完全不符。

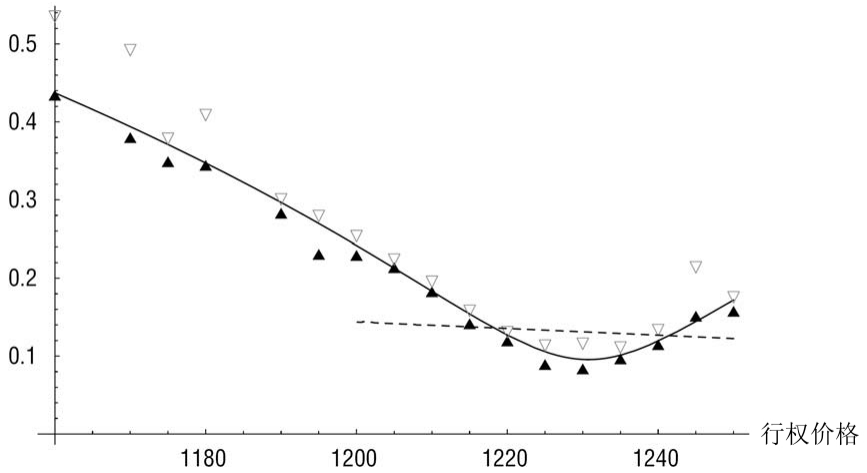


图5.1 2005年9月16日到期的期权，在2005年9月15日收盘时的波动率曲线，当时标准普尔500指数的点位为1227.73。三角符号代表买卖价对应的隐含波动率。实线是非线性函数（SVI参数化公式）拟合的波动率曲线。虚线代表了Heston模型下的波动率曲线，其参数是根据2005年9月标准普尔500指数得到的

经过再三讨论，很容易看出短期波动率曲线的极端倾斜情况与随机波动率模型不符；如果标的资产价格动态服从一个扩散过程，而且波动率的波动率处于一个比较合理的情况，短期的价格波动不会太

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

大。这样一来，标的资产收益率应该近似地服从正态分布，波动率倾斜应该比较平坦。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

5.2 跳扩散（Jump Diffusion）

定价公式的推导

在Wilmott（2000）中，我们假设股票价格服从下面的随机微分方程：

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}Z + (J-1)S\mathrm{d}q \qquad (5.1)$$

其中，q服从泊松过程：

$$\mathrm{d}q = \begin{cases} 0 & \text{概率为 } 1-\lambda(t)\mathrm{d}t \\ 1 & \text{概率为 } \lambda(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

当dq=1时，股价过程由S跳至JS。我们假设泊松过程dq和布朗运动dZ是独立的。

类似于随机波动率模型的情况，我们利用对冲的原理给出衍生品的定价公式。在这里，我们（不符合实际地）假设跳的幅度J是提前知道的。

在随机波动率模型下，要被对冲的第二个风险因子是随机波动率，在跳扩散模型下，要被对冲的第二个风险因子是跳。我们再次构建一个包含期权、$-\Delta$份股票和$-\Delta_1$份依赖跳的另一种资产的投资组合，其中期权价格由V （S， v，t）表示，另外一种依赖跳的资产的价格用V_1表示。

我们有：

$$\Pi = V - \Delta S - \Delta_1 V_1$$

组合价值在时间dt内的变化可以用下式表示：

$$\mathrm{d}\Pi = \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right\}\mathrm{d}t - \Delta_1\left\{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}\right\}\mathrm{d}t$$
$$+\left\{\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta\right\}dS^c$$
$$+\left\{V(JS,t) - V(S,t) - \Delta_1\left(V_1(JS,t) - V_1(S,t)\right) - \Delta(J-1)S\right\}\mathrm{d}q$$

其中，S^c（t）是S（t） （将截止至t时刻发生的所有跳都算上）的连续部分。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

为了让组合瞬时无风险，我们必须令下式成立：

$$\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta_1\frac{\partial V_1}{\partial S}-\Delta=0$$

使得dS项为零，且令：

$$V\left(JS,t\right)-V\left(S,t\right)-\Delta_1\left(V_1\left(JS,t\right)-V_1\left(S,t\right)\right)-\Delta\left(J-1\right)S=0$$

使得dq项为零。这样，我们得到：

$$\begin{aligned}d\prod&=\left\{\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\right\}\mathrm{d}t-\Delta_1\left\{\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V_1}{\partial S^2}\right\}\mathrm{d}t\\&=r\prod\mathrm{d}t\\&=r\left(V-\Delta S-\Delta_1V_1\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

在这里我们用到了一个结论，就是无风险投资组合的收益率必须等于无风险利率r，在这里我们假设无风险利率是确定的（不是随机的）。将所有含有V 的项放在等式左边，所有含有V_1的项放在等式右边，我们得到：

$$\frac{\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV}{\delta V-\left(J-1\right)S\dfrac{\partial V}{\partial S}}=\frac{\dfrac{\partial V_1}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2V_1}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial V_1}{\partial S}-rV_1}{\delta V_1-\left(J-1\right)S\dfrac{\partial V_1}{\partial S}}$$

其中，我们定义δV：=V （JS，t）-V （S，t）。

和随机波动率模型的情况一样，等式左边是只和V 有关的函数，右边是只和V_1有关的函数。只有两边都等于某个关于独立变量S和t的函数时，这种情况才成立，我们用-λ表示这个函数。推导出：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV\\&+\lambda\left(S,t\right)\left\{V\left(JS,t\right)-V\left(S,t\right)-\left(J-1\right)S\frac{\partial V}{\partial S}\right\}=0\end{aligned}\qquad(5.2)$$

为了解释λ（S，t），考虑某种资产的价值P，若T时刻没有跳跃发生，该资产收益为1美元，否则收益为0美元。我们假设跳过程与股价过程独立，就有：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\frac{\partial P}{\partial S}=0$$

另外，我们有P （JS，t）=0。将其代入式（5.2）得到：

$$\frac{\partial P}{\partial t}-rP-\lambda(S,t)P=0$$

因为我们假设 P 与 S 独立，所以 λ也独立于 S，上述方程的解为 $P(t)=\exp\left\{-\int_t^T\left(r+\lambda(t')\right)\mathrm{d}t'\right\}$。我们意识到，其实λ（t）是泊松过程的风险率（每单位时间发生违约的伪概率）。我们强调伪概率，因为它不是跳发生的实际概率（不管它到底有什么含义）。它是金融资产今天的价值。

跳跃幅度不确定的情况

我们在假设跳跃幅度是确定的的前提下得到了公式（5.2），这样的假设既不符合实际也不实用。跳扩散模型通常指定了跳跃幅度的分布，在这种情况下公式（5.2）会产生什么变化呢？

从复制的角度来说，跳跃幅度增加一个值，就需要增加一个资产来对冲风险。如果我们假设跳跃幅度服从某个分布、可以取任何实值，那么我们就需要无数个资产来对冲风险。这种情况下，复制理论就崩溃了：在这种跳扩散模型下无法进行复制、对冲。

这就是跳扩散模型的主要缺陷，在该模型的理论框架下没有复制组合，即使在连续交易的极限情况下也没有自融资的对冲策略。然而，从另一个角度讲，如果我们认为跳跃是存在的（从实际经验来看，我们也必须这样认为），期权就不是可以用股票和债券进行复制的多余资产，进一步讲，期权交易员就有比较高的社会价值。

下面，我们将公式（5.2）扩展到跳跃幅度不确定的情形，我们依然假设风险中性过程是跳跃幅度独立于股票价格的跳扩散过程。在风险中性测度下，任何资产的期望收益率是无风险利率。对公式（5.1）求期望，我们得到：

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{d}S\right]=rS\mathrm{d}t=\mu S\mathrm{d}t+\mathbb{E}\left[J-1\right]S\lambda(t)\mathrm{d}t$$

由上可知，风险中性漂移项 μ =r+ μ_J由下式给出：

$$\mu_J=-\lambda(t)\mathbb{E}\left[J-1\right]$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

和推导Black-Scholes公式的时候一样，我们必须有E[dV]=rVdt。运用伊藤引理，并在风险中性测度下求期望，得到：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathrm{d}V\right] &= rV\mathrm{d}t \\ &= \left\{\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\right\}\mathrm{d}t \\ &\quad +\lambda(t)\mathbb{E}\left[V(JS,t)-V(S)\right]\mathrm{d}t+\mu_JS\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

整理等式，我们得到了跳扩散模型下的金融资产定价公式：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV \\ &+\lambda(t)\left\{\mathbb{E}\left[V(JS,t)-V(S,t)\right]-\mathbb{E}\left[J-1\right]S\frac{\partial V}{\partial S}\right\}=0\end{aligned} \qquad (5.3)$$

再一次强调，等式（5.3）中的期望是在风险中性测度下的。为了得到衍生产品的定价，我们只关心在假设价格过程是带跳的情况下的产品价格；实际中，价格过程可能并不是模型假设的形式。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

5.3 特征函数方法

之前我们在解决衍生产品定价问题的时候会用到偏微分方程（PDEs），与之前的情况不同，方程（5.3）是一个偏积分微分方程（PIDE）。对所有可能的跳跃幅度进行积分会引入非定域性（nonlocality）。这样的方程可以用扩展的偏微分方程数值解法来解决，但是最自然的方法是用傅里叶变换（特征函数）的方法。

首先，我们回顾一下L′evy过程。

L′evy过程

如果风险率λ是常数，标的资产价格过程服从（5.1）所描述的跳扩散过程，那么标的资产价格的对数就服从一个L′evy过程。

定义：L′evy过程是一个依概率连续的cadlag随机过程x（t），t＞0，它满足增量平稳性、增量独立性，且x（0）=0。

任何一个L′evy过程都可以被表示成分散项、布朗运动和跳过程的线性组合。如果再加上增量独立性这个条件，我们可以得到下面的特征方程。

L′evy-Khintchine表示：如果x_t是一个L′evy过程，且L′evy密度μ（x）在开始有适当的定义，其特征函数$\phi_T(u) := \mathbb{E}\left[e^{iux_T}\right]$有如下表示：

$$\phi_T(u) = \exp\left\{iu\omega T - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 T + T\int\left[e^{iu\chi} - 1\right]\mu(\chi)\mathrm{d}\chi\right\} \qquad (5.4)$$

为了得到漂移系数ω，我们指定股票价格在风险中性测度下的期望为远期价格。基于现有的零利率、零分红的假设，相当于指定：

$$\phi_T(-i) = \mathbb{E}[e^{x_T}] = 1$$

这里，∫μ（x）dx=λ，是泊松强度或者跳发生的平均频率，也被称为风险率（Hazard Rate）。

特定过程的特征函数实例

在这里，我们先给出一些特定的、我们所熟知的过程的特征函数，然后再讲对一个特定过程如何求解方程式（5.3）。

例1：Black-Scholes 对于波动率为σ的指数布朗运动，其特征函数如下：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\phi_T(u)=\mathbb{E}[\mathrm{e}^{iux_T}]=\exp\left\{-\frac{1}{2}u(u+i)\sigma^2T\right\}$$

我们可以通过直接积分得到上面的公式，或直接利用L′evy-Khintchine表示。

例2：Heston Heston过程是路径依赖的；它的增量不是独立的，也不是L′evy过程。然而，我们在前文已经计算好它的特征函数了。由第2章可知，Heston的特征函数由公式（2.15）给出：

$$\phi_T\left(u\right)=\exp\left\{C\left(u,T\right)\bar{v}+D\left(u,T\right)v\right\}$$

C（u，T）和D（u，T）在公式（2.15）中有定义。

例 3：Merton 的跳扩散模型 最后，我们将举一个我们真正感兴趣的例子。假设跳的尺寸J是对数正态分布的，跳的对数的期望为α、标准差为δ，股票价格服从下面的随机微分方程：

$$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}Z+(\mathrm{e}^{\alpha+\delta\varepsilon}-1)S\mathrm{d}q$$

其中，ε～N（0，1）服从标准正态分布，则：

$$\mu(\chi)=\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\exp\left\{-\frac{(\chi-\alpha)^2}{2\delta^2}\right\}$$

利用L′evy-Khintchine表示（5.4），可以得到如下特征函数：

$$\begin{aligned}\phi_T(u)&=\exp\left\{iu\omega T-\frac{1}{2}u^2\sigma^2T+T\int[\mathrm{e}^{iu\chi}-1]\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}}\exp\left\{-\frac{(\chi-\alpha)^2}{2\delta^2}\right\}\mathrm{d}\chi\right\}\\&=\exp\left\{iu\omega T-\frac{1}{2}u^2\sigma^2T+\lambda T\left(\mathrm{e}^{iu\alpha-u^2\delta^2/2}-1\right)\right\}\end{aligned}\qquad(5.5)$$

为了得到ω，我们指定Φ_T（-i）=1，则：

$$\exp\left\{\omega T+\frac{1}{2}\sigma^2T+\lambda T\left(\mathrm{e}^{\alpha+\delta^2/2}-1\right)\right\}=1$$

由此得到：

$$\omega=-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\left(\mathrm{e}^{\alpha+\delta^2/2}-1\right)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

当α=δ=0时，我们又回到了对数正态分布的情况。

另外，我们可以将$\Phi_T(u)=e^{\psi(u)T}$代入公式（5.3）并直接推导出跳扩散过程的特征函数。定义正态分布y～N（α，δ），我们得到：

$$\psi(u)=-\frac{1}{2}u(u+i)\sigma^2-\lambda\left\{\mathbb{E}\left[e^{iuy}-1\right]+iu\mathbb{E}\left[e^{y}-1\right]\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}u(u+i)\sigma^2-\lambda\left\{\left(e^{iu\alpha-u^2\delta^2/2}-1\right)+iu\left(e^{\alpha+\delta^2/2}-1\right)\right\}$$

这样得到的特征函数与已经推导出的公式（5.5）是一样的。

用特征函数计算期权价格

给定一个随机过程，如果其特征函数有显式表达式，可以通过特征函数求逆的方法得到期权定价公式（参考Carr和Madan（1999）、Lewis（2000））。

我们将用到Lewis书中公式（2.10）的特殊形式。依然假设利率和分红为零：

$$C(S,K,T)=S-\sqrt{SK}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{du}{u^2+1/4}\mathrm{Re}\left[e^{-iuk}\phi_T(u-i/2)\right] \qquad (5.6)$$

其中，$k=\log\left(\frac{K}{S}\right)$。下面我们将给出证明。

公式（5.6）的证明

备兑看涨期权（covered call）在到期日的最小价值为min［S_T，K］，其中S_T是股票在到期日T的价格，K是期权的执行价格。考虑备兑看涨期权头寸G（k，τ）对于对数行权价格k：=log（K/F）的傅里叶变换：

$$\hat{G}(u,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuk}G(k,\tau)dx$$

记当前时刻为t、到期日为T，像往常一样将利率和分红设为零，我们得到：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\frac{1}{S}\hat{G}(u,T-t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{iuk}\mathbb{E}\left[\min[\mathrm{e}^{x_T},\mathrm{e}^{k+}]\,|\,x_t=0\right]\mathrm{d}k$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{iuk}\min[\mathrm{e}^{x_T},\mathrm{e}^{k})^{+}]\mathrm{d}k\,|\,x_t=0\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{x_T}\mathrm{e}^{iuk}\mathrm{e}^{k}\mathrm{d}k+\int_{x_T}^{\infty}\mathrm{e}^{iuk}\mathrm{e}^{x_T}\mathrm{d}k\,|\,x_t=0\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{e}^{(1+iu)x_T}}{1+iu}-\frac{\mathrm{e}^{(1+iu)x_T}}{iu}\,|\,x_t=0\right]\quad \text{仅在}0<\mathrm{Im}[u]<1\text{的成立}$$

$$=\frac{1}{u(u-i)}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{(1+iu)x_T}\,|\,x_t=0\right]$$

$$=\frac{1}{u(u-i)}\phi_T(u-i)$$

Φ_T（u）是特征函数。注意，只有当0＜Im[u]＜1存在时，备兑看涨期权的这个转换才成立。容易发现，上面的推导过程对到期收益为其他形式的期权也适用，但是需要注意的是，收益形式决定了这种转换是否存在。

为了用特征函数表示看涨期权价格，我们先用备兑期权的价格表示看涨期权价格，然后应用逆傅里叶变换，沿着Im[u]=1/2[3]的路径积分。得到：

$$C(S,K,T)=S-S\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i/2}^{\infty+i/2}\frac{\mathrm{d}u}{u(u-i)}\phi_T(u-i)\mathrm{e}^{-iku}$$

$$=S-S\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(u+i/2)(u-i/2)}\phi_T(u-i/2)\mathrm{e}^{-ik(u+i/2)}$$

$$=S-\sqrt{SK}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1}{4}}\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{-iuk}\phi_T(u-i/2)\right]$$

其中，$k=\log\left(\frac{K}{S}\right)$。

计算隐含波动率

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

对于任何模型，只要它的特征函数是知道的，就可以利用公式（5.6）得到Black-Scholes隐含波动率。

将Black-Scholes过程的特征函数代入公式（5.6），我们得到：

$$C_{BS}(S,K,T)=S-\sqrt{SK}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{1}{4}}\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{-iuk}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+\frac{1}{4})\sigma_{BS}^2T}\right]$$

然后，利用隐含波动率的定义得到：

$$\int_0^{\infty}\frac{du}{u^2+\frac{1}{4}}\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{-iuk}\left(\phi_T(u-i/2)-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+\frac{1}{4})\sigma_{BS}^2T}\right)\right]=0 \qquad (5.7)$$

公式（5.7）给出了隐含波动率曲面与标的股票过程特征函数之间的隐式关系。特别地，我们可以直接利用特征函数高效地计算出在值状态隐含波动率的结构、波动率曲线在在值状态处的倾斜程度，而不需要求解期权价格。

计算在值状态的波动率倾斜

假设Φ_T不依赖于股票价格S，因此也不依赖于k（我们能想到的所有例子都符合这一点）。对公式（5.7）求k的导数，在k=0时有：

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\left\{\frac{u\,\mathrm{Im}[\phi_T(u-i/2)]}{u^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_{BS}}{\partial k}\bigg|_{k=0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+\frac{1}{4})\omega_{BS}(0,T)}\right\}=0$$

对上式的第二项直接积分，得到：

$$\frac{\partial\sigma_{BS}}{\partial k}\bigg|_{k=0}=-\mathrm{e}^{\frac{\sigma_{BS}^2T}{8}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\frac{u\,\mathrm{Im}[\phi_T(u-i/2)]}{u^2+\frac{1}{4}} \qquad (5.8)$$

例1：Black-Scholes

$$\mathrm{Im}[\phi_T(u-i/2)]=\mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+1/4)\sigma^2T}\right]=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{BS}(k,T)}{\partial k}\bigg|_{k=0}=0\quad\forall T>0$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

例2：Merton的跳扩散模型（JD）记

$$\phi_T(u)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u(u+i)\sigma^2T}\mathrm{e}^{\psi(u)T}$$

其中，$\psi(u)=-\lambda iu(\mathrm{e}^{\alpha+\delta^2/2}-1)+\lambda(\mathrm{e}^{iu\alpha-u^2\delta^2/2}-1)$，然后，

$$\mathrm{Im}[\phi_T(u-i/2)]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u^2+\frac{1}{4})\sigma^2T}\ \mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{\psi(u-i/2)T}\right]$$

跳是如何影响波动率倾斜的

将条扩散过程的特征函数（5.5）代入关于隐含波动率的表达式（5.7）和关于波动率倾斜的表达式（5.8），我们可以观察对于不同的参数，跳是如何影响波动率曲面的。

T→0时跳扩散模型下波动率倾斜的表现

在跳扩散模型下考虑临近到期日的期权的定价问题。因为离到期日非常近，发生一次以上跳的概率可以忽略。因为跳的部分和分散项是独立的，所以期权的价值是跳产生的价值和没有跳时的价值的叠加。不失一般性，我们假设发生跳时，股票价格从S向下跳到JS。则：

$$\begin{aligned}C_J(S,K,\Delta T)&\approx(1-\lambda\Delta T)C_{BS}(S\mathrm{e}^{\mu_J\Delta T},K,\Delta T)+\lambda\Delta TC_{BS}(JS,K,T)\\&=C_{BS}(S\mathrm{e}^{\mu_J\Delta T},K,\Delta T)+O(\Delta T)\end{aligned}\qquad(5.9)$$

J是跳的尺寸，$C_J(\cdot)$代表跳扩散模型下期权的价格，$\mu_J=-\lambda(\mathrm{e}^{\alpha+\delta2/2}-1)$是对跳的风险中性漂移的调整。我们假设跳基本都是向下的，跳发生之后看涨期权处于实值状态的概率几乎为零，所以忽略了公式（5.9）的第二项。

我们继续计算在值状态时方差的倾斜：

$$\left.\frac{\partial\sigma_{BS}^2}{\partial k}\right|_{k=0}$$

注意，

$$\frac{\partial C_J}{\partial k}=\frac{\partial C_{BS}}{\partial k}+\frac{\partial C_{BS}}{\partial\sigma_{BS}}\frac{\partial\sigma_{BS}}{\partial k}$$

所以，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\left.\frac{\partial \sigma_{BS}}{\partial k}\right|_{k=0}=\left[\frac{\partial C_J}{\partial k}-\frac{\partial C_{BS}}{\partial k}\right]\left(\frac{\partial C_{BS}}{\sigma_{BS}}\right)^{-1}\Bigg|_{k=0}$$

现在，对于在值期权，

$$\left.\frac{\partial C_{BS}}{\sigma_{BS}}\right|_{k=0}\approx\frac{S}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\Delta T}$$

由公式（5.9）可知：

$$\left.\frac{1}{S}\left[\frac{\partial C_J}{\partial k}-\frac{\partial C_{BS}}{\partial k}\right]\right|_{k=0}\approx -N\left(+\frac{\mu_J\Delta T}{\sigma\sqrt{\Delta T}}-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta T}\right)+N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta T}\right)$$

$$\approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mu_J}{\sigma}\sqrt{\Delta T}$$

则对于很小的ΔT，

$$\left.\frac{\partial \sigma_{BS}^2}{\partial k}\right|_{k=0}\approx -2\mu_J \qquad (5.10)$$

由此可知，对于跳扩散模型，如果跳幅度的均值比标准差大很多，方差曲线在值状态的倾斜程度是跳幅度均值的二倍。

以上近似计算很好地解释了图5.2和图5.3，为了说明这一点，我们在表5.3中列出了每一组参数所对应的特征时间（Characteristic Time） T*和0时刻的倾斜程度。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

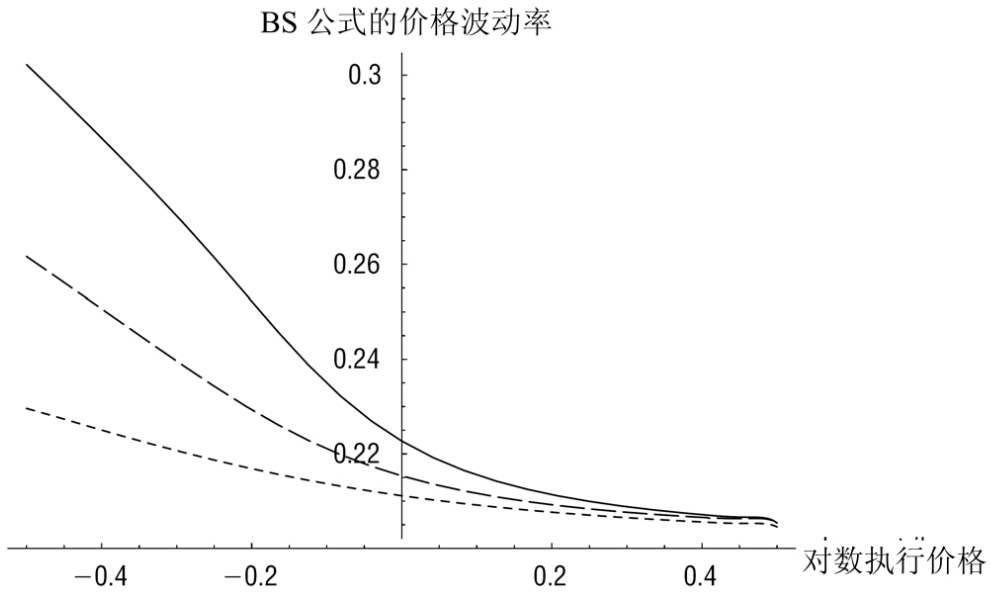


图5.2 跳扩散模型在不同的参数设置下，得到的3月到期期权的波动率曲线

表5.2 图5.2和图5.3对应的模型参数

	σ	λ	α	δ
实线	0.2	0.5	−0.15	0.05
虚线	0.2	1.0	−0.07	0.00
长虚线	0.2	1.0	−0.07	0.05

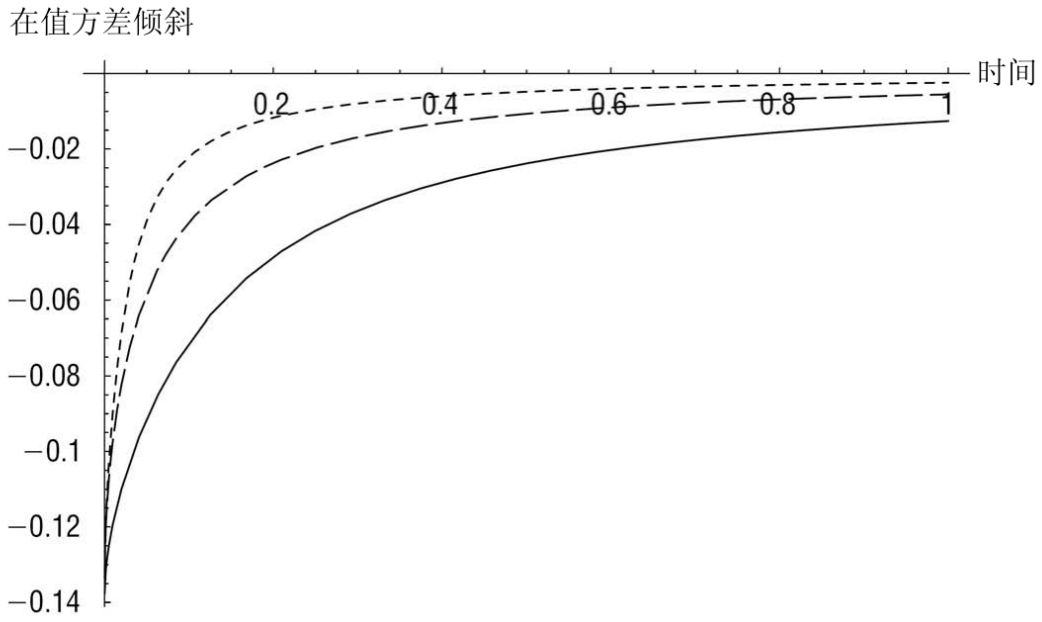


图5.3 跳扩散模型在不同的参数设置下，得到的方差曲线在在值状态时的倾斜的期限结构

表5.3 解释图5.2和图5.3

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

	σ	λ	α	δ	T^*	ψ_0
实线	0.2	0.5	−0.15	0.05	0.69	−0.133
虚线	0.2	1.0	−0.07	0.00	0.34	−0.135
长虚线	0.2	1.0	−0.07	0.05	0.33	−0.133

由跳造成的倾斜递减现象

在图 5.3 中可以看出，对于跳扩散模型，剩余到期时间超出一定的范围时，波动率倾斜下降的速度非常快。为了估计这个特征时间，我们注意到期权价格只跟股票价格在到期时的分布有关，如果跳的幅度跟单位标准差$\sigma\sqrt{T}$在一个数量级上，发生一次跳对股票价格的分布影响不大。在之前的章节中我们曾讨论过，T→0时的波动率倾斜是跳补偿μ_J引起的。幅度为μ_J可以由一系列频繁的小幅跳组成，也可以由不频繁的大幅跳组成。如果是一组高频率的小幅跳，在一定时间内很难区分含跳的价格和不含跳的价格的区别。另一方面，如果是一组低频率的大幅跳，且剩余到期时间足够小，即小于某个特征时间T^*时，我们就可以发现跳对股价最后的分布的影响。我们用下式计算特征时间T^*：

$$-\left(e^{\alpha+\delta^2/2}-1\right)\approx\sigma\sqrt{T^*}$$

为了看得更仔细点，图 5.4 给出了不同到期日对应的股价收益的分布，实线表示带跳的模型对应的分布，虚线是正态分布，跳扩散模型的参数选自表5.2：由图 5.4 可知，随着剩余到期时间T的增加，跳扩散模型对应的分布越来越接近正态分布，所以在特征时间T^*，很难说是否有跳存在。

$$\sigma=0.2;\lambda=0.5;\alpha=-0.15;\delta=0.05$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

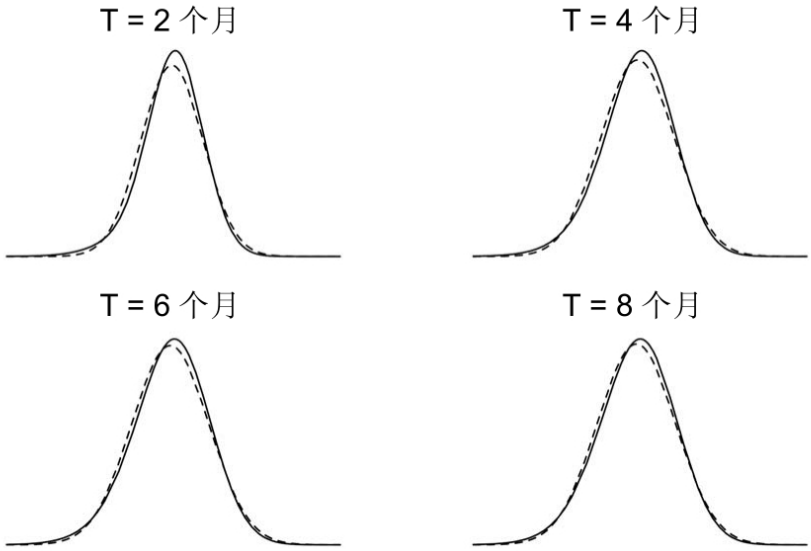


图5.4 随着剩余到期日的增加，收益率分布越来越接近正态分布。实线是跳扩散模型下的概率密度函数，虚线是相同均值和方差对应的正态分布的概率密度函数。用于生成这些点的参数所对应的特征时间是$T^{*}=0.67$

总结以上结论，剩余到期时间极短时，波动率倾斜是跳补偿（股票价格因为跳的存在而产生的平均变动）驱动的，在值状态对应的波动率倾斜的衰退速度取决于跳的幅度。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

5.4 随机波动率加跳

随机波动率加跳：仅在标的资产过程上加跳（SVJ）

跳可以产生短期波动率曲线的深度倾斜，但是随着剩余到期日的加长，波动率倾斜会很快衰退；随机波动率模型不能产生短期波动率曲线的深度倾斜，但是可以大概拟合较长的剩余到期日对应的波动率曲线。自然而然就有了在随机波动率模型中引入标的资产跳过程的想法。

假设我们在Heston模型中引入简单的Merton对数正态分布跳，这样就有了：

$$\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sqrt{v}S\mathrm{d}Z_1 + (\mathrm{e}^{\alpha+\delta\varepsilon} - 1)S\mathrm{d}q$$

$$\mathrm{d}v = -\lambda(v - \bar{v})\mathrm{d}t + \eta\sqrt{v}\mathrm{d}Z_2$$

其中，$\langle \mathrm{d}Z_1, \mathrm{d}Z_2 \rangle = \rho\mathrm{d}t$，∈～N （0，1），跳过程是泊松跳：

$$\mathrm{d}q = \begin{cases} 0 & \text{with probability } 1 - \lambda_J\mathrm{d}t \\ 1 & \text{with probability } \lambda_J\mathrm{d}t \end{cases}$$

其中，λ_J是跳跃强度（或风险率）。将上述过程代入定价公式中，很容易发现，其特征函数是Heston的特征函数和跳的特征函数的乘积。特别地，

$$\phi_T(u) = \mathrm{e}^{C(u,T)\bar{v} + D(u,T)v}\mathrm{e}^{\psi(u)T}$$

其中，$\psi_T(u) = -\lambda_J iu(\mathrm{e}^{\alpha+\delta^2/2} - 1) + \lambda_J(\mathrm{e}^{iu\alpha - u^2\delta^2/2} - 1)$，C（u，T）和D（u，T）与前文一样。

将上述式子代入公式（5.7）和公式（5.8），我们可以得到隐含波动率和在值状态波动率倾斜的表达式。

图5.5画出了Bakshi-Cao-Chen提出的SVJ模型的在值状态方差倾斜的期限结构，还有Heston模型和跳扩散模型各自对应的在值状态方差倾斜的期限结构的叠加（见表5.4）。可以观测到（至少对于选定的这组参数以下结论成立），不光特征函数是可以叠加的，在值状态方差倾斜也是可以叠加的。另一个实践中得到的结论是，Heston模型的参数可以稳定的拟合剩余到期日较长的期权数据，跳过程可以在剩余到期日较短的波动率曲线上产生深度倾斜。为了方便读者观察微小的差

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

别，图5.6画出了在剩余到期日较短时，SVJ模型和Heston模型在值状态方差倾斜期限结构。

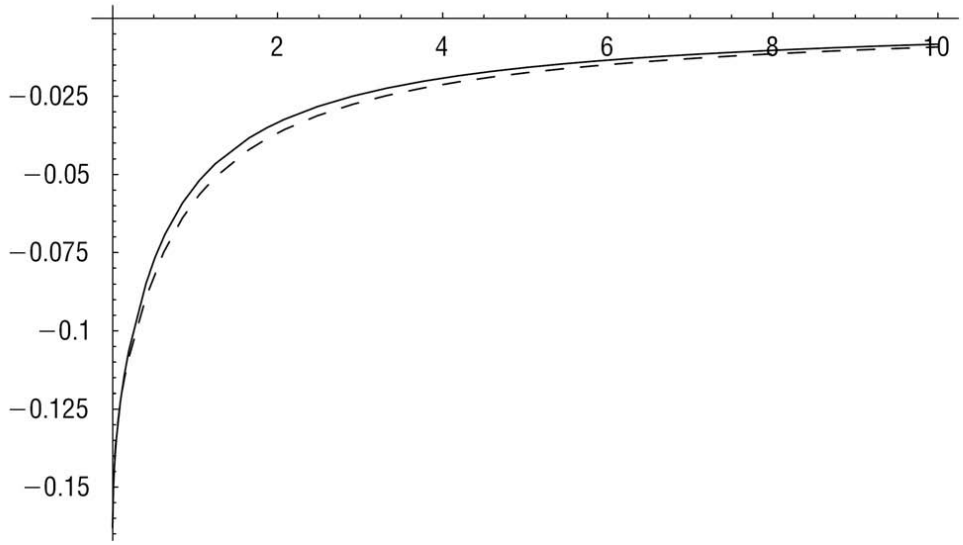


图5.5 实线代表了BCC参数对应的SVJ 模型下，方差曲线在值状态倾斜的期限结构。虚线代表了Heston模型下方差曲线在值状态倾斜与跳扩散模型下方差曲线在值状态倾斜的和的期限结构

表5.4 不同跳扩散模型拟合标准普尔500指数数据的结果。JD代表跳扩散，SVJ代表随机波动率跳模型

作者	模型	λ	η	ρ	$\bar{v}$	λ_J	α	δ
AA	JD	NA	NA	NA	0.032	0.089	−0.8898	0.4505
BCC	SVJ	2.03	0.38	−0.57	0.04	0.59	−0.05	0.07
M	SVJ	1.0	0.8	−0.7	0.04	0.5	−0.15	0
DPS	SVJ	3.99	0.27	−0.79	0.014	0.11	−0.12	0.15
JG	SVJ	0.54	0.30	−0.70	0.044	0.13	−0.12	0.10

作者	参考	数据来自
AA	Andersen and Andreasen (2000)	April 1999
BCC	Bakshi, Cao, and Chen (1997)	June 1988 to May 1991
M	Matytsin (1999)	1999
DPS	Duffie, Pan, and Singleton (2000)	November 1993
JG	This chapter	September 2005

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

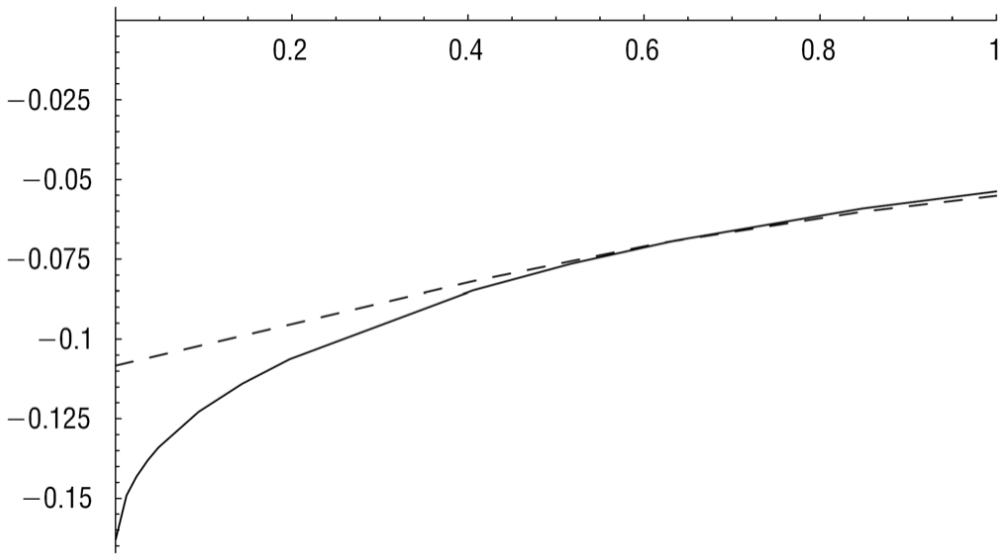


图5.6 实线代表了BCC参数对应的SVJ 模型下，方差曲线在值状态倾斜的期限结构。虚线代表了Heston模型下方差曲线在值状态倾斜的期限结构

然而，在SVJ模型下，股票价格发生跳跃之后，波动率保持不变，因为波动率与跳是不相关的。这跟实际中观测到的现象不符。实际中，股票价格大幅度的变动之后，隐含波动率通常也会发生明显的变化（即波动率也发生跳）。

标准普尔500指数（SPX）波动率曲面实证

跳扩散模型中只有4个参数：波动率σ，λ_J，α和δ，原则上，拟合期权价格数据并不难。SVJ 模型拥有更多的参数，它对数据的拟合效果更好，技术上的难度也没有增加很多。

很多作者都尝试过用跳扩散模型（JD）和随机波动率跳模型（SVJ）拟合标准普尔500指数期权数据，例如：Andersen和Andreasen（2000），Duffie、Pan和Singleton（2000）。表5.4总结了他们的结果。

需要注意的是，不同文章使用的期权数据所属日期不同，所以我们不能期待他们得到同样形状的波动率曲面。然而，对于标准普尔500指数期权来说，波动率曲面随着时间并没有明显的变化，所以这样的比较也是合理的。

AA估计结果的说明

表5.4中AA的估计结果非常引人注目，因为跳幅度的期望很大，为-0.8898。乍一看，将波动率曲面归咎于跳得到的参数估计结果如此不同，这让人感到困惑。但是仔细分析Andersen和Andreasen（2000）的文章，AA估计要求模型拟合的波动率倾斜对应的最长到期日长达 10年；前文中指出，如果想让特征时间T*长达10年之久，我们需要非常大

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

的跳幅度。然后，AA跳扩散模型对波动率曲面的整体拟合效果差强人意；这种跳扩散模型的设定是错误的，我们坚决拒绝使用 AA设定的跳扩散模型。

随机波动率加跳：在股票价格和波动率过程上同时加跳（SVJJ）

在讨论SVJ模型时我们曾指出，股票价格发生跳时，波动率不发生跳是不符合实际的。相反地，给股票价格过程加跳的同时，给波动率过程也加跳，依然保持了随机波动率模型的“波动率聚合”（Volatility Clustering）性质，即：大的变动后面往往跟随着大的变动，小的变动后面往往跟随着小的变动。

在Matytsin（1999）和Matytsin（2000）的文章中，Andrew Matytsin在SVJ模型的基础上，在波动率过程中加入了跳，即：股票价格的跳伴随着瞬时波动率的跳v㊉v+γ_v。该模型假设下，特征函数为：

$$\phi_T(u)=\exp\left\{\hat{C}(u,T)\bar{v}+\hat{D}(u,T)v\right\} \qquad (5.11)$$

其中，$\hat{C}(u,T)$和$\hat{D}(u,T)$如下：

$$\hat{C}(u,T)=C(u,T)+\lambda_J T\left[\mathrm{e}^{iu\alpha-u^2\delta^2/2}I(u,T)-1-iu\left(\mathrm{e}^{\alpha+\delta^2/2}-1\right)\right]$$

$$\hat{D}(u,T)=D(u,T)$$

其中，

$$I(u,T)=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{\gamma_v D(u,t)}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{T}\frac{2\gamma_v}{p_+p_-}\int_0^{-\gamma_v D(u,T)}\frac{\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z}{(1+z/p_+)(1+z/p_-)}$$

且，

$$p_\pm=\frac{\gamma_v}{\eta^2}(\beta-\rho\eta ui\pm d)$$

当γ_v→0时，我们有I（u，T）→1，仔细观察，此时我们又回到了SVJ模型的情况。另外，当T→0、I（u，T）→1时，SVJJ模型的特征函数和SVJ模型的特征函数一致。根据我们之前得到的启发性的结论，剩余到期日较短的波动率曲线的倾斜是关于只跳补偿因子（Jump Compensator）的函数，SVJ模型和SVJJ模型的跳补偿因子是相同的。直观地讲，当股票价格发生跳时，波动率也发生跳，但是这对T→0时

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

的极限情况没有影响。因为按照假设，股价发生跳之后在值期权会变成虚值期权，此时无论波动率是多少虚值期权的时间价值都是零。

另一方面，当T→∞时，波动率曲线倾斜会变大，原因是波动率过程中跳的存在使得波动率的波动率变大。

将SVJJ的特征函数（5.11）代入公式（5.8），令BBC模型的方差跳为γ_v=0.1，我们得到了该参数设置下的隐含波动率曲线倾斜，并得到图5.7和图5.8。图中显示的波动率曲线倾斜的期限结构符合我们的预期。特别地，在波动率过程中加入跳并没有更好地解释短期波动率曲线倾斜。相对于随机波动率模型和随机波动率跳模型（SVJ），SVJJ模型中波动率的波动率降低了，代价是股票价格的平均跳幅变得更加不合理。

SVJ模型拟合2005年9月15日标准普尔500指数期权数据

表5.5中列出了SVJ模型拟合2005年9月15日标准普尔500指数期权隐含波动率曲面的参数，该曲面在图3.2中画出。

与第3章相同，考查SVJ模型对隐含波动率曲面的拟合效果，最好的办法就是把市场曲面和模型曲面画在同一张图中进行对比。从图5.9 中可以看出，与图3.6展示的Heston模型的情况不同，SVJ模型更好地刻画了市场曲面的主要特征，尽管拟合效果仍然不够精准。再次说明，对于剩余到期日较长的波动率曲线，拟合效果很好。

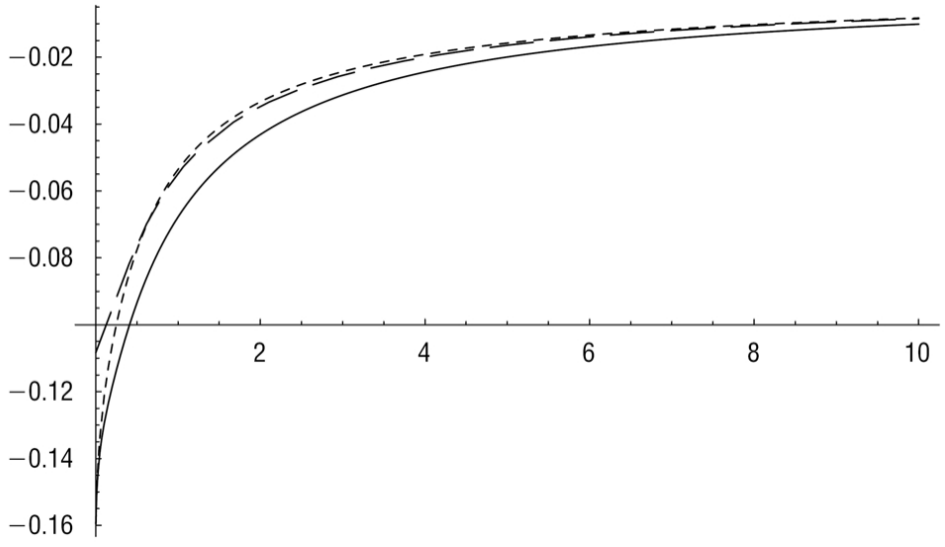


图5.7 实线代表了BCC参数对应的SVJJ模型下，方差曲线在值状态倾斜的期限结构。短虚线和长虚线分别代表了相同参数的SVJ模型和Heston模型下的情况

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

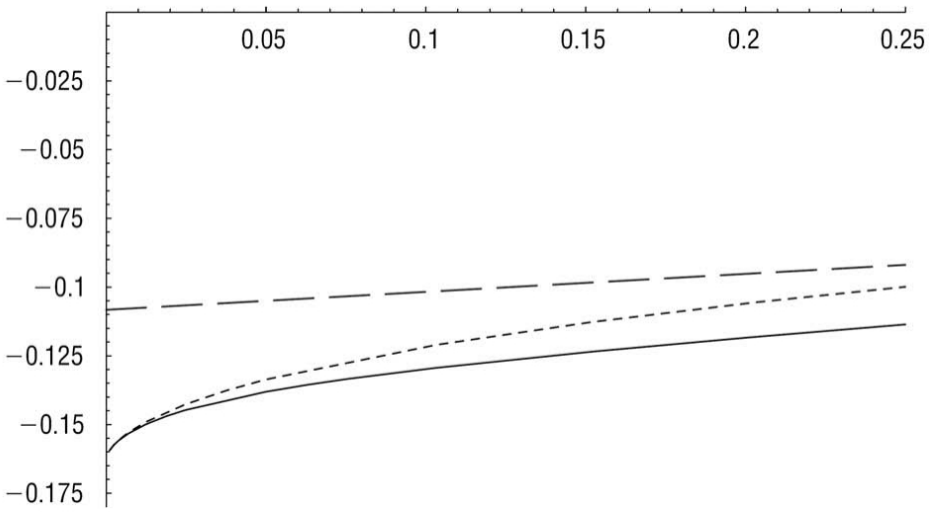


图5.8 图5.7短到期日部分的放大图

表5.5 2005年9月15日收盘时，SVJ模型拟合标准普尔500指数期权波动率曲面的结果

v	0.0158
$\overline{v}$	0.0439
η	0.3038
ρ	−0.6974
λ	0.5394
λ_J	0.1308
δ	0.0967
α	−0.1151

为什么SVJ模型更好

我们早就注意到，与Heston模型不同，SVJ模型对市场上观测到的隐含波动率曲面有相当好的拟合效果。读者们会好奇，如果通过在波动率动态中加入跳，得到模型假设更符合实际情况的SVJJ模型，是否能够更好地拟合市场曲面。很遗憾，通过观察图5.7和图5.8可以发现，虽然SVJJ模型比SVJ模型有更多的参数，它仍然不能很好地拟合市场曲面。在Heston模型、SVJ模型和SVJJ模型中，SVJ具有明显的优势。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

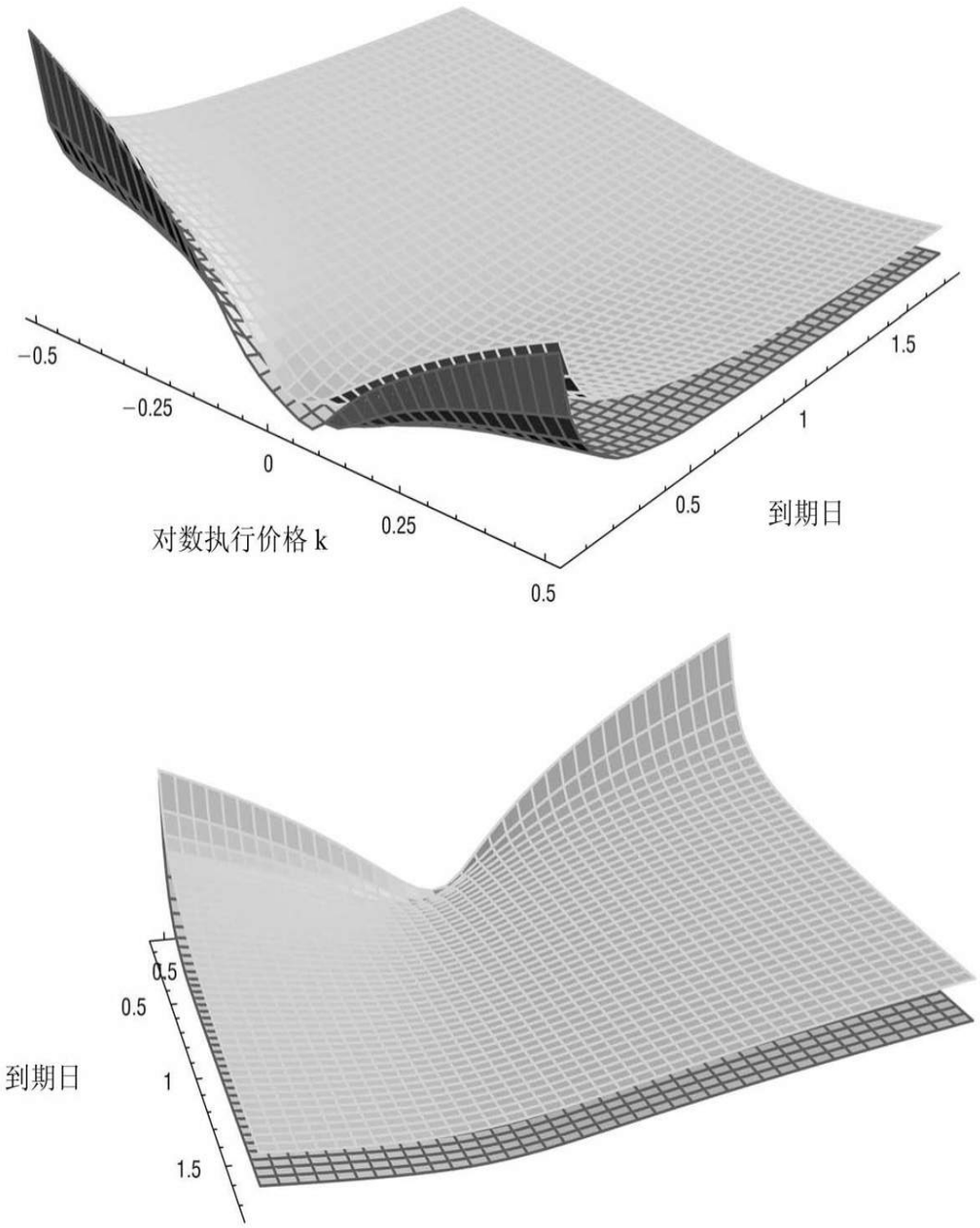


图5.9 2005年9月15日，实际观察到的隐含波动率曲面与SVJ模型拟合的隐含波动率曲面的对比。该图从两个角度展示了两张曲面的对比情况。与Heston模型不同，SVJ模型刻画了实际观察到的隐含波动率曲面的主要特征。上面颜色比较淡的曲面是实际观察到的标准普尔500指数期权隐含波动率曲面，下面颜色比较深的是SVJ拟合的波动率曲面。为了方便观察，SVJ模型拟合的曲面被整体向下平移了5个点

---

[1]标准普尔500指数期权的最终收益是按照第二天（这个例子中，是9月16日）开盘的价格计算出的。

[2]关于SVI参数化形式的详细内容请参考Gatheral（2004）。

[3]备兑看涨期权的傅里叶变换在这个范围内存在，这也是我们用备兑看涨期权价格表示看涨期权价格的原因。或者，我们可以直接用看涨期权的变换，并用柯西留数定理（Cauchy’s Residue Theorem）来求逆。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第6章 违约风险建模

第5章已明确指出，标的资产价格过程中的跳（Jumps）是解释隐含波动率曲面所不可或缺的组成部分。然而，在单标的的情形下，违约风险（Default Risk）则更能直观地解释波动率倾斜。后文中我们将看到，如果信用利差——也称违约风险——较高，隐含波动率曲线可能出现较为极端的倾斜。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

6.1 Merton的违约模型

如我们所期待的，Wilmott（2000）违约风险建模给出了很好的介绍。金融工程师通常使用的违约风险模型（Default Risk Model）有两类，即：所谓的结构化模型（Structural Models）和约化模型（Reduced Form Models）。Jabairu Stock在Wilmott.com网站上给出了一个很有用的定义：

结构化模型（针对公司违约）假设违约发生在某些经济变量（比如公司价值）超过一定的阈值（比如债务价值）的时候，通常使用未定债权（Contingent Claim）模型来支持这一论断，并求出违约概率。H-W和Creditgrades均属于这种模型。

简约化模型将违约视为随机现象——它不是任何可观测指标或者间接指标触发的，发生即发生了。Duffle 和 Singleton（1999）模型便是一个简约化模型。这类模型校对起来很容易，但是它们却不能解释违约发生的原因，我想大多数人对这类模型持谨慎态度。简单地说，你只需要估计一个违约到达强度（可能是时间的函数，也可能是一个随机过程，抑或是其他变量的函数）即可。

Merton 在 1974 年提出的模型便是简约化模型中最简单的一种。它假设单位时间内股票价格跳到0的概率为λ（t） （即，危险率（Hazard Rate）），即发生违约。跳和股票价格过程是独立的。于是，未定债权必须满足跳扩散模型下的定价方程（5.3），其中E[J]=0。看涨期权的定价比较直接，因为V（SJ，t）=0。将上述边界条件代入方程（5.3）可以得到：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV-\lambda(t)\left\{V-S\frac{\partial V}{\partial S}\right\}=0 \qquad (6.1)$$

我们马上便看出，方程（6.1）其实是一个将利率平移为r+λ的Black-Scholes方程，其解自然也就是将利率平移为r+λ的Black-Scholes公式。

如果我们假设债券的违约回收率为0（违约发生的情况下），即B（JS，t）=0，平移后的利率的意义就明确了。有违约风险的债券的价格也必须满足方程（6.1），结合边界条件，我们得到：

$$B(t,T)=\mathrm{e}^{-\int_t^T\left(r(s)+\lambda(s)\right)\mathrm{d}s}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

我们将修正后的利率r+λ视作风险债券的收益率（Yield）（即，无风险利率加上信用利差）。如果发生违约时，债券的回收率R不为0，情况会复杂一些（不会复杂很多）。

直观意义

股价可以跳为零（或者称跳灭模型，Jump to Ruin）的违约模型的解竟然是Black-Scholes，乍一看似乎很难理解。但是，这背后蕴含着经济原理。

回想一下Black-Scholes公式的推导过程，过程中我们用股票和无风险债券构建资产组合复制看涨期权。假设我们是用股票和风险债券来完成这一过程。只要没有发生违约，推导过程和以前便没有区别，构建的投资组合也是自融资（self-financing）的。在假设违约回收率为零的前提下，如果过程中发生违约，股票和风险债券价值都将跌为零——然而，这个投资组合仍旧是自融资的。

试想一下，如果我们按照 Black-Scholes 对冲策略那样只用股票和无风险债券来对冲一个看涨期权空头（正如大多数金融从业者那样），会怎么样呢？我们将会做多股票、做空债券，在违约情形下，股票和看涨期权会失去所有价值，无风险债券的价值不变（即，违约回收率为 100%）。换句话说，如果用无风险债券对冲，违约会为我们带来意外的利润。但另一方面，相比于用风险债券来对冲，用无风险债券对冲会使我们的债券空头少付出一些持有成本（或者债券的收益率）。

违约风险对波动率倾斜的影响

任何股票发行者都有违约的可能。事实上，发挥着对违约风险定价功能的信用衍生品市场非常活跃（可参考 Default-Risk.com）。我们通常用无风险利率来计算Black-Scholes隐含波动率，然而正如之前所说，在Merton模型下，我们需要用风险利率来对看涨期权定价公式进行修正。如果股票发行者拥有较高的信用利差（Credit Spread），此修正会使得近月期权的隐含波动率曲线倾斜非常大。

假设用Merton模型给期权定价是正确的，在图6.1中，画出了不同信用利差的股票发行者相应的隐含波动率曲线。可以看到，此模型产生的下行倾斜（Downside Skew）非常大。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

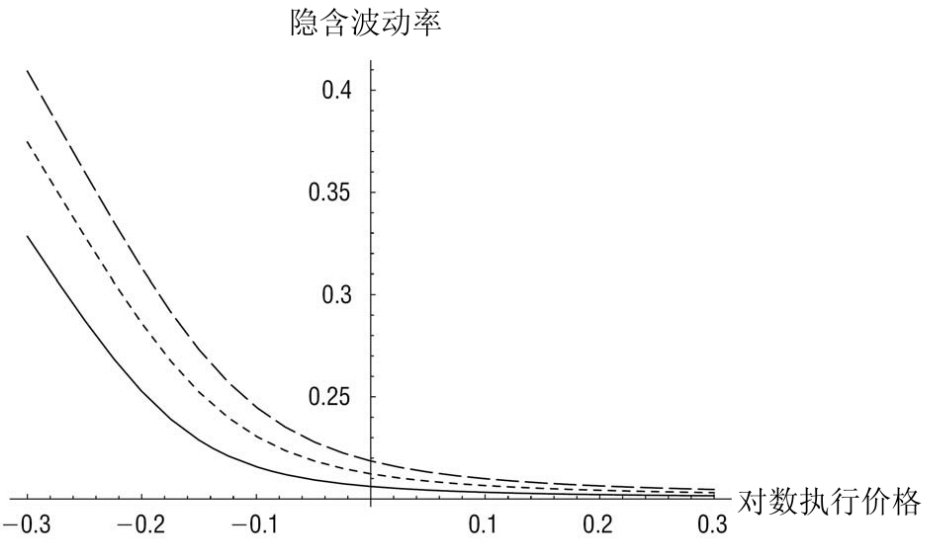


图6.1 三条线分别为Merton模型下股票波动率为20%，信用利差为100基点（实线）、200基点（虚线）、300基点（长虚线）的三月到期的期权隐含波动率曲线

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

6.2 资产结构套利

资本结构套利是指在股权权益、固定权益和可转换权益之间进行套利的一种投资方式。往复杂了说，业界工作者通过建立复杂的公司资本结构模型给出不同权益的定价——主要是股票、债券和可转换债券。往简单了说，交易员在市场寻找机会，例如：如果出现股权看跌期权比信用衍生品便宜，他便会买前者而卖后者。为了更好地理解资本结构套利，我们先回顾一下期权平价公式（Put-Call Parity）。

期权平价公式

我们在前面已经看到，在Merton模型下，股权看涨期权的价格就是将无风险利率替换成风险利率后Black-Scholes公式所给出的价格。那么看跌期权呢？之前的推导要想成立，认购期权必须满足跳灭（Jump to Ruin）出现后价值跌至0的条件。对于股票发行者卖出的看跌期权，这个条件是成立的。假设违约回收率为零，股票和期权的发行者一旦出现违约，看跌期权将失去其所有价值。从而，用风险利率替换Black-Scholes公式中的无风险利率得到的定价公式，对股票发行者卖出的看跌期权是有效的。

对于其他没有违约风险的对象（例如，交易所）卖出的看跌期权要如何定价呢？事实上，在股票发行者发生违约后，其对应的看跌期权价值变应为期权的执行价。我们已经知道如何给没有违约风险的对象发行的看涨期权定价了；按照定义，股票发行者不能对自己股票衍生出的看涨期权违约，因此，股票发行者卖出的看涨期权价格应该和其他没有违约风险的对象卖出的看涨期权价格相等。我们可以通过期权平价公式来推导看跌期权的价格：在期权发行方没有违约风险的情况下，使用无风险债券；在期权发行方存在违约风险的情况下，使用风险债券。

分别用P_0、C_0和B_0表示无违约风险的对象发行的看跌期权、看涨期权及无风险债券；用P_1、C_1和B_1表示股票发行者（存在违约风险）发行的看跌期权、看涨期权及风险债券。

$$
\begin{aligned}
P_0 &= C_0 + KB_0 - S \quad \text{(从使用无风险债券的平价公式中得出)} \\
&= C_1 + KB_0 - S \quad \text{(违约对象和非违约对象发行的看涨期权价格相等)} \\
&= P_1 + S - KB_1 + KB_0 - S \quad \text{(从使用风险债券的平价公式中得出)} \\
&= P_1 + K(B_0 - B_1)
\end{aligned}
$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

正如我们所期望的，没有违约风险的对象发行的看跌期权比有违约风险的对象发行的看跌期权更贵。价格的差距等于风险债券和无风险债券之间的价差乘以执行价。假设无风险利率和信用利差与到期日无关，并且令t=0，我们可以得到：

$$B_0 - B_1 = \mathrm{e}^{-rT}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda T}\right)$$

这恰好是Merton模型下贴现后的违约概率。综合起来看，存在违约风险与不存在违约风险的看跌期权的价差就是执行价乘以违约发生的（伪）概率。此收益大约和信用衍生品市场中的违约看跌期权（Default Put）相当。

套利机会

回顾图6.1，我们知道，对于信用利差较大的股票发行者，其期权的隐含波动率曲线下降趋势非常陡峭。近些年，权益类期权做市商都是通过经验法则来判断隐含波动率曲线是否合理；他们一定不会认为图 6.1 那样极端的隐含波动率曲线是合理的。利用做市商对市场的理解不够深刻这一事实，交易员会在交易所买入隐含波动率“非常高”的股票期权（当然，比理论上的隐含波动率要低），然后在信用衍生品市场卖出同一只股票对应的违约看跌期权（Default Put），从而锁定无风险收益。

事实上，对冲基金过去也是这样做的，在很长一段时间里它们都可以通过此类交易获取无风险收益。在此期间，期权做市商看到它们认为已经太过陡峭的隐含波动率曲线变得更为陡峭，自然也遭受了亏损。

最终，波动率倾斜变得太过陡峭，对冲基金开始利用看跌期权价差反方向套取无风险利润。一种很流行的做法是，买一手在值的看跌期权，再卖出两手执行价为股价一半的看跌期权。从图 6.2 中我们可以看到，无论股价处于何种状态，此策略的到期收益为正，如果构建策略组合的成本为零或者为负值，这就是一笔纯套利的交易。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

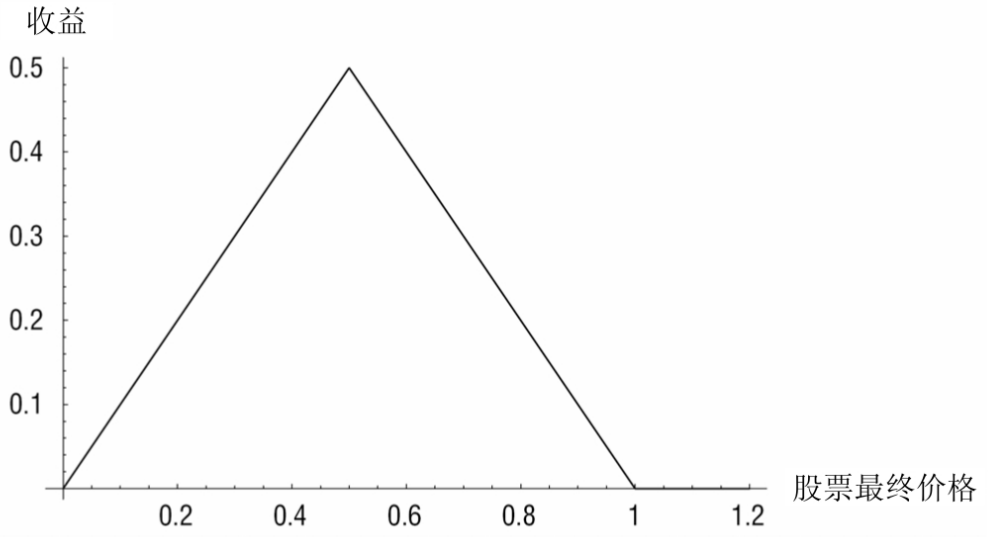


图6.2 1×2的看跌期权逆价差组合：买一手执行价为1.0的看跌期权，卖出两手执行价为0.5的看跌期权

期权做市商的日子并不好过——需要对市场有很深刻的理解，才能避免被别人套利。

我们看到，信用违约互换市场上隐含着一个看跌期权的价格下界，而价差套利隐含着一个看跌期权的价格上界。举个具体的例子，我们考虑执行价为股票价格0.5倍的、一年期看跌期权，表6.1列出了信用利差分别为100基点、200基点、300基点时，该期权的价格上下界。

假设在值期权的隐含波动率是 20%，我们用平值期权价格的一半作为该期权的价格上界，在不同的信用利差假设下其均为 0.0398。另一方面，该期权的价格下界可以用执行价乘以违约概率的贴现值来计算。我们可以看到，在值期权隐含波动率不变时，随着信用利差的增长，看跌期权价格下界逐渐向着上界靠拢。随着波动率倾斜的稳定增长，很容易就能看出期权做市商报价已经超过上界多少了。

表6.1 执行价为股票价格0.5倍的一年期期权，在信用价差不同时的套利区间上下界（在值期权的波动率为20%）

价作价差	下界	上界
250	0.0123	0.0398
500	0.0244	0.0398
750	0.0361	0.0398

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

6.3 跳灭模型中的局部和隐含波动率

前面已经提到，将危险率平移修正后的风险利率代入Black-Scholes公式，可以得到跳灭模型下看涨期权的价格。

我们回顾一下第1章里局部波动率的定义（1.6）：

$$\sigma_{loc}^2(K,T,S)=\frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \qquad (6.2)$$

因为看涨期权的 Black-Scholes 定价公式对于股票价格S和执行价K是线性齐次的，我们可以得到以下关系式：

$$C=S\frac{\partial C}{\partial S}+K\frac{\partial C}{\partial K}$$

随后得到（提示：对上式分别求关于S和K的微分）：

$$K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}=S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

假设跳灭模型中的利率和分红率为零，我们得到：

$$\frac{\partial C}{\partial T}=\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+\lambda S\frac{\partial C}{\partial S}-\lambda C$$

其中，σ是波动率（分散项系数），λ是危险率。重写上面的方程，得到：

$$\frac{\partial C}{\partial T}=\frac{1}{2}\sigma^2K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}-\lambda K\frac{\partial C}{\partial K}$$

将公式（6.2）代入后，得：

$$\sigma_{loc}^2(K,T,S)=\sigma^2-\lambda\frac{K\frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

$$=\sigma^2+2\lambda\sigma\sqrt{T}\frac{N(d_2)}{N'(d_2)}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

其中，

$$d_2 = \frac{\log S / K + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

对于很低的价值状态K/S≪1，我们有$d_2 \gg 0$和

$$N(d_2) \approx 1$$

$$N'(d_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-d_2^2/2}$$

所以，对于很低的价值状态，我们有：

$$\sigma_{loc}^2 (K,T,S) \approx \sigma^2 + 2\lambda\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{+d_2^2/2}$$

图6.3给出了跳灭模型下典型的局部波动率曲面。由第3章可知，隐含方差（隐含波动率的平方）是 gamma 加权下局部波动率的平均值。在跳灭模型下，从在值状态开始，随着价值状态的降低，隐含波动率增加的速度非常快，并在高价值状态的地方趋于常量σ，与图6.1完全一致，与随机波动率模型非常不同。

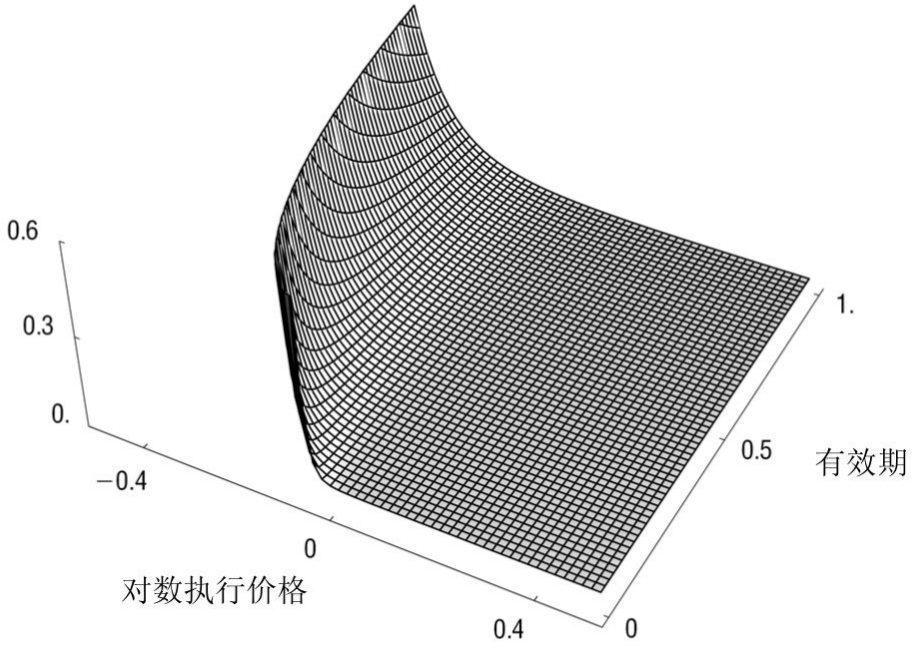


图6.3 局部方差图，其中λ=0.05，σ=0.2

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

6.4 违约风险对期权价格的影响

为了让上述分析更加具体，我们考虑2004年10月20日当天以GT（Goodyear Tire and Rubber）为标的资产、2005年1月到期的期权。

之前我们已经知道了，Merton 跳灭模型下看涨期权的价格由利率平移后的Black-Scholes公式给出。在此例中，我们希望求出一个平移后的利率和常数波动率，使得用该模型计算出的期权价格最大程度地拟合市场隐含波动率计算出的期权价格[1]（即，Merton模型的最优参数）。

我们求出的最优参数为：

$$\lambda = 0.01934$$

$$\sigma = 0.3946$$

我们用这些参数计算看涨期权价格，并计算标准Black-Scholes隐含波动率（代入无风险利率）。结果如表6.2所示。

表6.2 2004年10月20日当天2005年1月到期的GT期权的隐含波动率（GT当时的价格为9.40）。Merton波动率为用Merton模型（参数是上文得到的最优参数）下计算出的期权价格倒推出的隐含波动率

执行价格	看跌期权 Vol.	看涨期权 Vol.	Merton Vol.
2.50		147.2%	145.2%
5.00	73.6%	88.3%	85.8%
7.50	48.3%	58.2%	51.2%
10.00	38.1%	45.0%	43.1%
12.50	41.2%	48.1%	41.5%
15.00	51.2%	54.3%	40.9%
17.50	64.5%	66.5%	40.6%
20.00		77.3%	40.0%
25.00		94.7%	40.0%
30.00		108.3%	40.0%

事实上，因为GT的信用利差非常高，Merton模型对隐含波动率曲线的左翼拟合得非常好，读者可以参考图6.4。

然而，对于低执行价来说，Merton模型产生的波动率倾斜太过陡峭；并且正如我们所预测的一样，它完全没有拟合出波动率曲线的右翼（高执行价隐含波动率结构），这与市场中实际观测到的数据不相符。我们现在对随机波动率模型已经相当熟悉了，市场上观测到的隐

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

含波动率曲面上正向倾斜的右翼恰好反映出了未来波动率水平的不确定性；Merton模型产生的平坦右翼却反映了其确定的波动率假设。

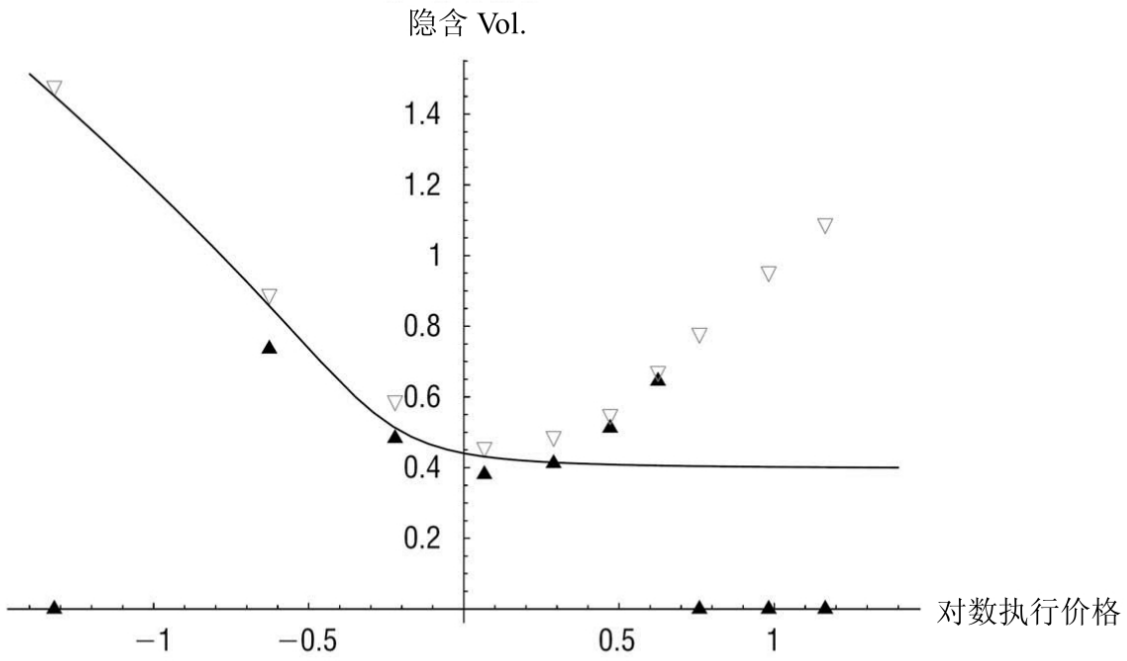


图6.4 三角符号代表从期权的买卖价格推导出的隐含波动率，实线是Merton模型拟合的波动率曲线

最后，我们或许会问这些拟合出的参数是否符合现实。根据对隐含波动率的观察，波动率估计值σ=39.46%显然是合理的。为了说明风险率估计值λ=0.01934也是合理的，我们注意到GT零息债券（假设利率为0）的合理价格应该是：

$$P_t = \mathrm{e}^{-\lambda t} R + (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})$$

其中，R是违约回收率。彭博对违约回收率的标准假设是0.4，可以通过求解下式得到该债券的信用利差，

$$P_t = \mathrm{e}^{-ct} = \mathrm{e}^{-\lambda t} R + (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})$$

根据已经选定的λ和R值，我们得到，

$$c = 4.58\%$$

得到的信用利差和GT的5年期信用违约互换超过5%的利率相当，对于剩余到期日为3个月的期权来说太高了。不过，重点是：高信用利差的股票期权呈现出的隐含波动率倾斜，在很大程度上可以归因于违约风险。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

6.5 CreditGrades模型

Merton 的跳灭模型是约化模型的雏形，结构化模型则源于Black、Scholes （1973）和 Merton（1974）的模型，该模型把公司股价作为公司价值的看涨期权来建模。假设公司价值V是不含跳的扩散过程。债务便等价于看涨期权卖出方卖出了期权并买入公司价值V的头寸。于是，股价和它的波动率之间便建立起了天然的联系，随着股价下跌，公司的杠杆增大，进而波动率增加，这符合实际经验。很明显，这同样会引入隐含波动率倾斜。

这个简单的模型面临的最大实际问题是，它没有办法产生明显的短期信用利差；当公司价值低于某一确定阈值时发生违约，时间较短时，公司价值过程没有充分的时间触碰违约阈值。Finkelstein（2002）和Lardy（2002）通过引入不确定的违约阈值解决了这个问题。阈值的不确定性是我们可以想象得出的，谁能准确地推导出公司的违约阈值呢？举个例子，美国航空（AMR）目前账面价值为负，但它的企业价值却超过了130亿美元。

模型的建立

假定公司价值V是一个漂移项为零的几何布朗运动：

$$\frac{\mathrm{d}V_t}{V_t}=\sigma \mathrm{d}W$$

其中，σ是公司价值V的波动率。

假设公司的违约阈值为LD，其中D是公司当前的每股债务价值，L是违约回收率。与之前讨论的一样，我们假设违约回收率L符合均值为$\bar{L}$、标准差为λ的对数正态分布，则：

$$LD=\bar{L}D\mathrm{e}^{\lambda Z-\lambda^2/2}$$

其中，Z～N （0，1），随机变量Z与布朗运动W_t独立。

幸存概率

定义：

$$X_t:=\sigma W_t-\lambda Z-\frac{\sigma^2 t}{2}-\frac{\lambda^2}{2}$$

则X_t服从正态分布，且：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\mathbb{E}[X_t] = -\frac{\sigma^2}{2}\left(t + \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\mathrm{Var}[X_t] = \sigma^2\left(t + \frac{\lambda^2}{\sigma^2}\right)$$

这促使我们用漂移项为-σ²/2、方差为σ²、初值在-Δt：=-λ²/σ²为 0（即，$\hat{X}_{-\Delta t} = 0$）的布朗运动 $\hat{X}$ 来近似X。X 明显不是带漂移项的布朗运动，但是对于t≥0它的矩（moments）相等。

下列式子满足时，发生违约：

$$V = V_0 \mathrm{e}^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2} = LD = \bar{L}D\mathrm{e}^{\lambda Z - \lambda^2/2}$$

或等价地，

$$X_t = \log\left(\frac{\bar{L}D}{V_0}\right) - \lambda^2$$

因为 $\hat{X}$ 是带漂移项的布朗运动，幸存概率（或者说，不触碰违约阈值的概率）是由一个类似Black-Scholes公式的式子给出的：

$$P_t = N\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{\log d}{A_t}\right) - dN\left(-\frac{A_t}{2} - \frac{\log d}{A_t}\right)$$

其中，

$$d = \frac{V_0\mathrm{e}^{\lambda^2}}{\bar{L}D};\ A_t^2 = \sigma^2 t + \lambda^2$$

P_t是t时刻的幸存概率，可以用债券或信用违约互换等风险工具的价格直接估计出它的值。

我们可以计算在违约阈值L给定的情况下的生存概率，然后在违约阈值L的取值范围内进行积分，从而避免了用ˆX 近似X。这种方法得到的幸存概率是一个二元的累积分布函数，不过在实际运用中两种方法的计算结果并没有显著的不同。

权益的波动率

股票价格与公司价值的关系可以用下式近似描述（忽略期权的时间价值）：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$V \approx LD + S$$

然后可以得到：

$$\sigma \sim \frac{\delta V}{V} \approx \frac{\delta S}{S + LD} = \frac{\delta S}{S} \frac{S}{S + LD} \sim \sigma_S \frac{S}{S + LD}$$

其中，σ_S是股票价格的波动率。由上式可知，如果σ是固定的，随着股票价格的上升，股票价格的波动率σ_S下降。相反，当股票价格S趋近于零时，股票价格波动率以1/S的速度增长。

模型参数校准

我们最后将模型用市场可观测变量表示如下：

$$P_t = N\left(-\frac{A_t}{2} + \frac{\log d}{A_t}\right) - dN\left(-\frac{A_t}{2} - \frac{\log d}{A_t}\right) \qquad (6.3)$$

其中：

$$d = \frac{S_0 + \bar{L}D}{\bar{L}D} e^{\lambda^2}; \qquad A_t^2 = \left(\sigma_S^* \frac{S^*}{S^* + \bar{L}D}\right)^2 t + \lambda^2$$

其中，S*股票价格，σ_S^*是股票价格为S*时的波动率。

在Finger（2002）的技术文档里，L和λ是从历史违约回收率中计算出来的，而D是从资产负债表中计算出的。只要有足够的债券，我们可以从信用利差的期限结构中（或者从生存概率P_t的期限结构中）计算出所有的参数。通过从公司及其所在产业的数据而非信用利差的期限结构来推测$\bar{L}$、λ和D，而不是通过信用利差的期限结构推测这些数据，理论上可以使我们发现定价过高或过低的产品。

限于本书的内容范围，我们只需记住信用利差和波动率倾斜之间存在着明确的关系即可，只是这次我们把它放到了一个更为实际的模型里去。

---

[1]注意：市场上交易的期权其实是美式期权。我们这里做了一个合理的假设：美式期权的波动率和欧式期权的波动率比较接近。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第7章 波动率曲面渐近

讨论到现在，读者们可能会产生这样的疑问：推导出的结论和拟合的结果与所假设的动态过程形式有什么关系？在本章中，我们研究常用的带跳的随机波动率模型所生成的波动率曲面的形态。我们会看到，事实上，所有这类模型所产生的波动率曲面形态都是类似的。特别地，我们会发现，实际中凭借波动率曲面的一个观测值很难确定波动率动态的具体形式。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

7.1 剩余到期时间较短的情况

令x：=log（F/K），然后改写我们最开始介绍的一般的随机波动率模型（1.1）和（1.2），假设α和β都不依赖于S或t，我们有：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= -\frac{\nu}{2}\mathrm{d}t + \sqrt{\nu}\mathrm{d}Z_1 \\ \mathrm{d}\nu &= \alpha(\nu)\mathrm{d}t + \eta\sqrt{\nu}\beta(\nu)\mathrm{d}Z_2 \end{aligned} \tag{7.1}$$

我们可以记

$$\mathrm{d}Z_2 = \rho\mathrm{d}Z_1 + \varphi\mathrm{d}Z_1^*$$

其中，$\varphi=\sqrt{1-\rho^2}$，$\left\langle \mathrm{d}Z_1^*, \mathrm{d}Z_1 \right\rangle = 0$。消除$\sqrt{\nu}\mathrm{d}Z_1$，我们得到：

$$\mathrm{d}\nu = \alpha(\nu,t)\mathrm{d}t + \rho\eta\beta(\nu,t)\left\{\mathrm{d}x + \frac{\nu}{2}\mathrm{d}t\right\} + \varphi\eta\beta(\nu)\sqrt{\nu}\mathrm{d}Z_1^*$$

然后，

$$\mathbb{E}[\nu + \mathrm{d}\nu \mid \mathrm{d}x] = \nu + \alpha(\nu)\mathrm{d}t + \rho\eta\beta(\nu)\left\{\mathrm{d}x + \frac{\nu}{2}\mathrm{d}t\right\}$$

所以，对于比较短的到期日（相对于α（ν）和β（ν）而言），有：

$$\begin{aligned} \nu_{loc}(x,t) &= \mathbb{E}[\nu_t \mid x_t = x] \\ &\approx \nu_0 + \left[\alpha(\nu_0) + \rho\eta\frac{\nu_0}{2}\beta(\nu_0)\right]t + \rho\eta\beta(\nu_0)x \end{aligned} \tag{7.2}$$

x的系数（波动率倾斜的斜率）与Lee（2001）用扰动扩张法（perturbation expansion approach）得到的系数吻合。

为了将这一结果扩展到隐含波动率上，我们需要先介绍下面的引理。

引理：对于剩余到期日较短的情况，局部波动率倾斜的陡峭程度是隐含波动率倾斜的两倍。

证明：由第3章可知，Black-Scholes总体隐含方差（Implied Total Variance）是局部方差在股票价格从定价时的价格到到期时的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

执行价最有可能经过的路径上的积分。这个路径几乎是一条直线（见图7.1）。

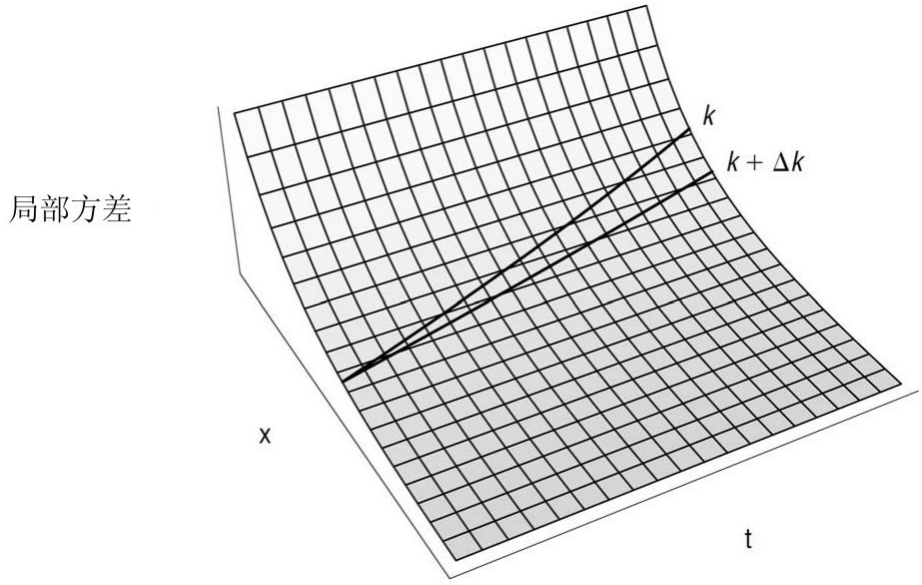


图7.1 对于到期日短的期权，最可能路径几乎是从期权定价时的现货价格到到期日时的执行价之间的一条直线。它遵循以下事实：$\sigma_{BS}^2(k,T) \approx [v_{loc}(0,0) + v_{loc}(k,T)]/2$，以及隐含方差曲线倾斜大概是局部方差曲线倾斜的一半

另外，由公式（7.2）可知，对于剩余到期日较短的情况，局部方差的倾斜几乎等于常数β（v_0）。作为局部方差曲线倾斜的平均值，BS隐含方差曲线倾斜是局部方差曲线倾斜的一半。正式的推导如下：

$$\begin{aligned}\sigma_{BS}(K,T)^2 &\approx \frac{1}{T}\int_0^T v_{loc}(\tilde{x}_t,t)\mathrm{d}t \\ &\approx \text{const.} + \frac{1}{T}\int_0^T \rho\eta\beta(v_0)\tilde{x}_t\mathrm{d}t \\ &\approx \text{const.} + \frac{1}{T}\int_0^T \rho\eta\beta(v_0)x_T\frac{t}{T}\mathrm{d}t \\ &\approx \text{const.} + \frac{1}{2}\rho\eta\beta(v_0)x_T\end{aligned}$$

其中，x～代表股票价格从0时刻的价格到到期日时的执行价最有可能经过的路径。

我们总结出，对于剩余到期日较短的情况，BS隐含方差曲线倾斜由下式给出：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{BS}(x,t)^2 = \frac{\rho\eta}{2}\beta(v_0) \qquad (7.3)$$

回顾Heston模型，该模型下β（v）=1，此时我们发现公式（7.3）与我们在第3章中推导出的、Heston模型下短期波动率倾斜表现一致。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

7.2 Medvedev-Scaillet的结果

第5章给出了启发式的方法，用于计算剩余到期时间极小时跳对波动率倾斜的贡献，事实证明，我们可以做得更好一点。对于极短的剩余到期时间 τ 和固定的正则化对数执行价z，Medvedev和Scaillet在2004年的论文中提出了扰动扩张法，其中，z的定义如下：

$$z := \frac{k}{\sigma_{BS}(k,\tau)\sqrt{\tau}}$$

假设标的资产价格服从如下扩散过程：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} &= \sigma_t \mathrm{d}Z_1 \\ \mathrm{d}\sigma_t &= a(\sigma_t)\mathrm{d}t + b(\sigma_t)\mathrm{d}Z_2 \end{aligned} \qquad (7.4)$$

我们发现隐含波动率I在剩余到期日极短的情况下，有如下渐近性质：

$$I(z,\tau,\sigma) = \sigma + I_1(z;\sigma)\sqrt{\tau} + I_2(z;\sigma)\tau + O(\tau\sqrt{\tau})$$

其中，I_1和I_2是只关于z和瞬时波动率 $\sigma = \sqrt{\nu}$ 的函数：

$$\begin{aligned} I_1(z;\sigma) &= \frac{\rho b(\sigma) z}{2} \\ I_2(z;\sigma) &= \frac{1}{6}\left\{\frac{b(\sigma)^2(1-\rho)^2}{\sigma} + \rho^2 b(\sigma)\partial_\sigma b(\sigma)\right\} z^2 \\ &\quad + \frac{a(\sigma)}{2} + \frac{\rho\sigma b(\sigma)}{4} + \frac{1}{24}\frac{\rho^2 b(\sigma)^2}{\sigma} \\ &\quad + \frac{1}{12}\frac{b(\sigma)^2}{\sigma} - \frac{1}{6}\rho^2 b(\sigma)\partial_\sigma b(\sigma) \end{aligned} \qquad (7.5)$$

我们注意到，当对数执行价k→0和剩余到期时间 τ →0时，隐含波动率就是瞬时波动率 σ 。所以，纵使人们经常以瞬时波动率无法被观测为理由批评随机波动率模型，这一缺陷并没有成为该模型在实际应用中的主要限制。在流动性好的期权市场，隐含波动率曲面非常光

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

滑，我们可以通过向外插值得到剩余到期日为0的、处于在值状态的隐含波动率，且对结果比较确定。

为了计算短期波动率曲线倾斜，将下式代入（7.5）：

$$z=\frac{k}{I(z,\tau;\sigma)\sqrt{\tau}}$$

并令τ→0，得到：

$$\left.\frac{\partial I}{\partial k}\right|_{k=0}\to\frac{\rho b(\sigma)}{2\sigma} \qquad (7.6)$$

这与之前用启发式的方法得到的公式（7.3）吻合。

注意到短期波动率曲线倾斜与时间没有明显关系，只与波动率的随机微分方程形式有关。

相反，我们能观察到，局部波动率模型生成的短期波动率曲线倾斜随时间的推进迅速下降。所以，即使找到一个随机波动率模型，它与局部波动率模型对今天所有的欧式期权定价相同，我们不能保证这两个模型下得到未来开始期权（行权价在未来某一时间确定）的价格相同。虽然两个模型都能拟合当前期权市场，但是它们的波动率曲面动态却非常不同。

公式（7.3）和公式（7.6）概括了一个看似疯狂的观点：也许所有的随机波动率模型，无论复杂还是简单，生成的BS隐含波动率倾斜都与因子β（ν）有关；不光τ→0时是这样，对所有的τ≥0都是这样。后文中，我们会考查剩余到期日较长时波动率倾斜的表现，并给出使这些结果看起来更具真实性的证据。

SABR模型

Hagan 提出的（Hagan、Kumar、Lesniewski 和 Woodward（2002））、著名的SABR模型（或称“随机α、β、ρ模型”）假设的动态过程如下：

$$\mathrm{d}S_t=\sigma_t S_t^{\beta}\mathrm{d}Z_1$$
$$\mathrm{d}\sigma_t=\chi\sigma_t\mathrm{d}Z_2$$

其中，$\langle \mathrm{d}Z_1,\mathrm{d}Z_2\rangle=\rho\mathrm{d}t$。

SABR 模型的波动率没有均值回复特性，所以它对短期波动率曲线的拟合效果较好。该模型的优点是，当τ→0时，对于短期隐含波动率

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

曲线存在确定的表达式。用这个表达式拟合短期隐含波动率，可以得到模型的参数α、β和ρ。当β=1时，Hagan、Kumar、Lesniewski和Woodward（2002）给出的SABR模型隐含波动率公式（2.17a）简化成：

$$\sigma_{BS}(k)=\sigma_0\frac{y}{f(y)}\left\{1+\left[\frac{1}{4}\rho\chi\sigma_0+\frac{2-3\rho^2}{24}\chi^2\right]\tau+O(\tau^2)\right\} \qquad (7.7)$$

其中，

$$y:=-\chi\frac{k}{\sigma_0}$$

$$f(y)=\log\left\{\frac{\sqrt{1-2\rho y+y^2}+y-\rho}{1-\rho}\right\}$$

对公式（7.7）求对数，得到的对数波动率公式由两部分组成，一部分只与y有关，另一部分只与τ有关。对公式（7.7）进行泰勒展开，展开至y的二阶、τ的一阶（即，$y\sim\sqrt{\tau}$），得到：

$$\sigma_{BS}(k,\tau)=\sigma_0\left\{1-\frac{1}{2}\rho y+\frac{2-3\rho^2}{12}y^2+\left[\frac{1}{4}\rho\chi\sigma_0+\frac{2-3\rho^2}{24}\chi^2\right]\tau+O(\tau\sqrt{\tau})\right\}$$

将a（σ）=0和b（σ）=x σ_0代入公式（7.5），得到：

$$I_1(z;\sigma_0)=\frac{1}{2}\rho\chi\sigma_0 z$$

$$I_2(z;\sigma_0)=\frac{1}{6}\chi^2\sigma_0 z^2+\frac{1}{4}\rho\chi\sigma_0^2+\frac{1}{24}\rho^2\chi^2\sigma_0+\frac{1}{12}\chi^2\sigma_0-\frac{1}{6}\rho^2\chi^2\sigma_0$$

然后，注意到：

$$\chi z\sqrt{\tau}=\chi\frac{k}{\sigma_{BS}}=-y\frac{\sigma_0}{\sigma_{BS}}=-y\left(1+\frac{1}{2}\rho y\right)+O(y^3)$$

得到：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\sigma_{BS}(k,\tau)=\sigma_0+I_1(z;\sigma_0)\sqrt{\tau}+I_2(z;\sigma_0)\tau+O(\tau\sqrt{\tau})$$
$$=\sigma_0\left\{1-\frac{1}{2}\rho y+\frac{2-3\rho^2}{12}y^2\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{4}\rho\chi\sigma_0+\frac{2-3\rho^2}{24}\chi^2\right]\tau+O(\tau\sqrt{\tau})\right\}$$

我们看到，对于较小的剩余到期日 τ，Medvedev-Scaillet 的公式（7.5）和 SABR模型的隐含波动率公式（7.7）给出的结果相同。

最后，注意到SABR模型下可以得出：

$$\left.\frac{\partial\sigma_{BS}}{\partial k}\right|_{k=0}=\frac{\rho}{2}$$

是 $\beta(v)=\sqrt{v}$ 、η=2 x 时公式（7.6）的特殊情况。为了让读者更加清楚，我们对SABR模型的波动率过程应用伊藤引理，得到：

$$\mathrm{d}v=\chi^2 v\mathrm{d}t+2\chi v\mathrm{d}Z$$

其中， v = σ 2。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

7.3 加入跳

Medvedev 和 Scaillet（2004）文章的主要结果是关于股票价格过程带跳的模型的更复杂的表达式。作者注意到，波动率过程中加入跳更符合实际，但是与我们之前所提到的一样，波动率过程中加跳对短期波动率曲线的形态并没有贡献。

特别地，考虑下述带跳的随机波动率模型：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} &= \sigma_t \mathrm{d}Z_1 + J(\sigma_t)\mathrm{d}q_t \\ \mathrm{d}\sigma_t &= a(\sigma_t)\mathrm{d}t + b(\sigma_t)\mathrm{d}Z_2\end{aligned} \tag{7.8}$$

跳的部分dq是强度为 $\lambda_J(\sigma_t)$ 的标准泊松过程，$J(\sigma_t)$ 是取值范围为（-1，∞）、密度函数为 f 的随机变量。和之前一样，跳补偿 μ_J 如下：

$$\mu_J = \lambda_J \int_{-1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

该模型下，短期隐含波动率如下：

$$I(z,\tau,\sigma) = \sigma + \tilde{I}_1(z;\sigma)\sqrt{\tau} + \tilde{I}_2(z;\sigma)\tau + O(\tau\sqrt{\tau})$$

其中，$\tilde{I}_1$ 和 $\tilde{I}_2$ 如下：

$$\tilde{I}_1(z;\sigma) = I_1(z;\sigma) - \mu_J g(z) + \eta_J b(z)$$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_2(z;\sigma) = I_2(z;\sigma) &+ \frac{1}{2\sigma}\left(\mu_J g(z) - \eta_J b(z)\right)^2 z^2 \\ &- \left\{-\frac{\mu_J\sigma}{2} - \sigma\lambda_J + \frac{\mu_J^2}{\sigma} + \frac{\mu_J b(\sigma)\rho}{2\sigma}\right\} g(z)z \\ &- \left\{\frac{\eta_J\sigma}{2} + \sigma\chi_J - \frac{\mu_J\eta_J}{\sigma} - \frac{\eta_J b(\sigma)\rho}{2\sigma}\right\} b(z)z \\ &+ \frac{\rho b(\sigma)\mu_J}{2\sigma} - \frac{\rho\partial_\sigma b(\sigma)\mu_J}{2} + \frac{\mu_J^2}{2\sigma} - \frac{\sigma\mu_J}{2} - \lambda_J\sigma\end{aligned} \tag{7.9}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

其中，$\eta_J = \lambda_J \int_0^\infty x f(x)\mathrm{d}x$ 是跳补偿的正值部分，$\chi = \lambda_J \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 是向上跳的概率，且

$$g(z) = \frac{N(-z)}{N'(z)};\quad b(z) = \frac{1}{N'(z)}$$

和预期相符，没有跳发生时，所有与跳有关的部分都消失了。

推论

跳扩散模型下（波动率是确定的），τ→0时，隐含波动率倾斜的极限为：

$$\left.\frac{\partial I}{\partial k}\right|_{k=0} \to -\frac{\mu_J}{\sigma}$$

令g′（0）=1和b′（0）=1可以得到这个结论。这个结果和第5章中启发性的推导所得到的结果一致。

在带跳的随机波动率模型下，τ→0时，隐含波动率倾斜的极限为：

$$\left.\frac{\partial I}{\partial k}\right|_{k=0} \to -\frac{\rho b(\sigma)}{2\sigma} - \frac{\mu_J}{\sigma}$$

这与我们之前得到的结论相符，即随机波动率和跳推在值状态方差倾斜的影响几乎是线性叠加的。实际上，τ→0时，我们有：

$$\left.\frac{\partial \nu_{BS}}{\partial k}\right|_{k=0} \to \rho b(\sigma) - 2\mu_J \quad \tau \to 0$$

所以，在τ=0时它们就是叠加的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

7.4 剩余到期时间较长的情况：Fouque、Papanicolaou和Sircar

Fouque、Papanicolaou和Sircar在1999年和2000年的两篇文章中指出，对于任意的波动率服从均值回复过程的随机波动率模型，应用扩展扰动方法，可以得到剩余到期日较长的期权对应的Black-Scholes隐含波动率的近似表达式，表达式是关于对数价值状态和剩余到期时间的。他们特别研究了对数波动率服从Orenstein-Uhlenbeck过程的情况。模型假设如下：

$$\mathrm{d}x = -\frac{\sigma^2}{2}dt + \sigma \mathrm{d}Z_1$$

$$\mathrm{d}\log(\sigma_t) = -\lambda\left[\log(\sigma) - \overline{\log(\sigma)}\right]\mathrm{d}t + \xi \mathrm{d}Z_2$$

他们发现BS隐含波动率倾斜的斜率如下（对于较大的λT）：

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{BS}(x,T) \approx \frac{\rho}{\lambda}\frac{\xi}{T} \qquad (7.10)$$

为了与（7.1）保持一致，我们要用v重新表述以上结论。注意到（仅考虑随机项），dv～2σdσ，在对数OU模型中，

$$\mathrm{d}\sigma \sim \xi\sigma \mathrm{d}Z_2$$

所以，

$$\mathrm{d}\nu \sim 2\xi\nu \mathrm{d}Z_2$$

则，（7.1）中的β（v）如下：

$$\eta\beta(\nu) = 2\xi\sqrt{\nu}$$

由公式（7.10），BS隐含方差倾斜如下：

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{BS}(x,T)^2 \approx \frac{2\rho\xi\sqrt{\nu}}{\lambda T} = \frac{\rho\eta\beta(\nu)}{\lambda T}$$

回顾公式（3.19），我们注意到，对于较大的λT，以上结论与在Heston模型（β（v）=1）下波动率倾斜的表现一致。我们现在有足够的证据让我们的结论更令人信服：对于随机波动率模型而言，无论是短期还是长期波动率曲线的倾斜，不同模型的表现一致、并取决于

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

因子β（ν）。假设这个结论是成立的，我们该如何在长期和短期波动率倾斜的渐进特征间进行插值？

很明显，在第3章中，我们已经在Heston模型下得到了最令人信服的短期和长期波动率倾斜插值公式，

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{BS}(x,T)^2 \approx \frac{\rho\eta\beta(\nu)}{\lambda' T}\left\{1-\frac{(1-e^{-\lambda' T})}{\lambda' T}\right\} \qquad (7.11)$$

其中，$\lambda' = \lambda - \frac{1}{2}\rho\eta\beta(\nu)$。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

7.5 极小的波动率的波动率：Lewis

Lewis（2000）在假设波动率的波动率（volatility of volatility）极小的情况下，针对波动率的波动率对隐含波动率进行了扰动展开，结果对任何符合（7.1）形式的随机波动率模型适用。

根据Lewis（2000）第143页的公式（3.14），我们有：

$$\nu_{BS}(k,t)=\beta_0(\nu,t)+\beta_1(\nu,t)k+\beta_2(\nu,t)k^2+O(\eta)^3$$

其中，

$$\beta_0(\nu,t)=\nu+\frac{1}{2}\frac{\eta}{t}J^{(1)}+\eta^2\left[\frac{J^{(2)}}{t}-\frac{1}{2}\frac{J^{(3)}}{\nu t^2}\left(1+\frac{1}{4}\nu t\right)-\frac{J^{(4)}}{\nu t^2}\left(1-\frac{1}{4}\nu t\right)+\frac{(J^{(1)})^2}{\nu^2 t^3}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{16}\nu t\right)\right] \quad (7.12)$$

$$\beta_1(\nu,t)=\frac{\eta}{\nu t^2}J^{(1)}+\eta^2\left[-\frac{J^{(4)}}{\nu t^2}-\frac{(J^{(1)})^2}{\nu^2 t^3}\right]$$

$$\beta_2(\nu,t)=\eta^2\left[\frac{1}{2}\frac{J^{(3)}}{\nu^2 t^3}+\frac{J^{(4)}}{\nu^2 t^3}-\frac{5}{4}\frac{(J^{(1)})^2}{\nu^3 t^4}\right]$$

Lewis（2000）第144页的例4对我们感兴趣的情况进行了分析：

$$\mathrm{d}\nu=-\lambda(\nu-\bar{\nu})\mathrm{d}t+\eta\nu^{\phi}\mathrm{d}Z$$

对于这个波动率过程，当 v = v 时，有：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$J^{(1)} = \bar{\nu}^{1/2+\phi} t \frac{\rho}{\lambda}\left\{1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda t}\right\}$$

$$J^{(3)} = \bar{\nu}^{2\phi} \frac{\rho}{2\lambda^3}\left\{\frac{3}{2} + \lambda t + 2\mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda t}\right\}$$

$$J^{(4)} = \bar{\nu}^{2\phi} \frac{\rho^2}{\lambda^3}\left(\frac{1}{2} + \phi\right)\left\{-2 + \lambda t + (2+\lambda t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right\}$$

代入公式（7.12）得到：

$$\left.\frac{\partial \nu_{BS}}{\partial k}\right|_{k=0} = \frac{\rho \eta \nu^{\phi-1/2}}{\lambda t}\left\{1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda t}\right\} + O(\eta^2)$$

由此可见，公式（7.11）并非只是似是而非的，对于波动率的波动率 η 的一阶来说，它是准确的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

7.6 执行价的极值：Roger Lee

Roger Lee 在其 2004 年的一篇精彩的论文中指出，当|k|→∞时，一个关于k=log（K/F）的线性函数可以作为隐含方差的上界。另外，他展示了如何将隐含方差倾斜上界的两翼的坡度与标的资产价格过程的最大有限矩联系起来。

特别地，令 $q^* := \sup\left\{q : \mathbb{E}S_T^{-q} < \infty\right\}$，且，

$$\beta^* := \limsup_{k\to-\infty} \frac{\sigma_{BS}^2(k,T)T}{|k|}$$

然后有，β*∈[0，2]：

$$q^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^*}} - \frac{\sqrt{\beta^*}}{2}\right)^2$$

由上面的式子反推出β*=g （q*），其中，

$$g(x) = 2 - 4\left[\sqrt{x^2+x} - x\right]$$

另外，令 $p^* := \sup\left\{p : \mathbb{E}S_T^{1+p} < \infty\right\}$，且，

$$\alpha^* := \limsup_{k\to+\infty} \frac{\sigma_{BS}^2(k,T)T}{|k|}$$

我们有α*∈[0，2]，

$$p^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^*}} - \frac{\sqrt{\alpha^*}}{2}\right)^2$$

对于左翼，有结论a*=g（p*）。

Lee的推导过程假设只存在一个鞅测度。他没有对标的资产收益的分布做出具体假设，结论完全是模型独立的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

Benaim和Friz（2006）用F （x）表示标的资产收益x的累积分布函数，证明了给定log[1-F（x）]和log[F（-x）]分别满足某些技术条件的情况下（大多数实际中常用的模型符合这些条件），Roger Lee的上界可以被一个极限形式代替。这样，我们可以把右侧尾部写成：

$$\frac{\sigma_{BS}(k,T)^2 T}{k} \sim g\left(-1-\frac{\log[1-F(k)]}{k}\right), \text{ 当 } k\to\infty \qquad (7.13)$$

左侧尾部写成：

$$\frac{\sigma_{BS}(-k,T)^2 T}{k} \sim g\left(\frac{-\log F(-k)}{k}\right), \text{ 当 } k\to\infty \qquad (7.14)$$

将标的资产收益分布的F的尾部特征代入公式（7.13）和（7.14），我们可以直接得到波动率微笑尾部的具体表现，而不仅仅是Lee的上界。而且，在大多数模型下，这个分布的尾部特征是知道的。

Lee和Benaim-Friz的结果之间的联系一目了然，因为我们注意到，对大多数实际应用较广的模型，下面的极限存在：

$$q^* = \lim_{k\to\infty}\left\{-\frac{\log F(-k)}{k}\right\}$$

且，

$$p^* = \lim_{k\to\infty}\left\{-1-\frac{\log[1-F(k)]}{k}\right\}$$

例：Black-Scholes

在Black-Scholes模型下，剩余到期时间为T、波动率为σ时，

$$1-F(k)=\int_k^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\mathrm{e}^{-y^2/(2\sigma^2 T)}\mathrm{d}y \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-k^2/(2\sigma^2 T)}}{k},\quad k\to\infty$$

然后有：

$$\log[1-F(k)] \sim -\frac{k^2}{2\sigma^2 T},\quad k\to\infty$$

和

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\frac{\sigma_{BS}(k,T)^2 T}{k} \sim g\left(-1+\frac{k}{2\sigma^2 T}\right) \sim \frac{2\sigma^2 T}{2k}, \quad k \to \infty$$

随后，我们得到：

$$\sigma_{BS}(k,T)^2 \sim \sigma^2, \quad k \to \infty$$

与Black-Scholes模型下隐含波动率微笑是平的吻合。根据Benaim-Friz的结论，我们得到波动率倾斜在极限情况下的表现。在Black-Scholes模型下，所有矩是有限的，$p^*=q^*=\infty$，且关于上界的结果没有排除k/log（k）的影响。

随机波动率模型

Dragulescu和Yakovenko（2002）在Heston模型下计算了累积分布函数的尾部性质，发现它关于|k|是线性的。由Benaim-Friz的结论可知，$\sigma_{BS}^2(k,T)$ 的尾部也是关于|k|线性的。Dragulescu和Yakovenko指出，结合其他作者得到的结论，波动率曲线的尾部线性性不仅在Heston模型下成立，而且是随机波动率模型的一般特征。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

7.7 渐近性总结

到目前为止，我们很清楚地知道，波动率曲面的大致形态与模型的选择无关。只要合理地选择参数，任何随机波动率跳模型生成的隐含波动率曲面的形态都是相似的。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第8章 隐含波动率曲面动态

由第7章可知，所有随机波动率模型生成的波动率曲面形态相似。如果我们只专注于当日波动率曲面的形态，会觉得难以区分不同的模型。然而，如果我们研究波动率倾斜的动态——特别是观测到的波动率倾斜是如何随着波动率整体水平变化的，就会发现模型之间的不同。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

8.1 随机波动率模型下的波动率倾斜动态

对波动率倾斜动态的经验研究表明，$\frac{\partial}{\partial k}\sigma(k,t)$与波动率的整体水平几乎是独立的。用隐含方差倾斜表示这一观点：

$$\frac{\partial}{\partial k}\sigma_{BS}(k,t)^2 = 2\sigma_{BS}(k,t)\frac{\partial}{\partial k}\sigma_{BS}(k,t) \sim \sqrt{v(k,t)}$$

与公式（7.11）对比，我们得到β（v）～v。回溯公式（7.1）对β（v）的定义，我们知道，与Heston模型假设的平方根过程不同，v几乎是对数正太的。这样我们就有理由认为，相比于波动率水平低的时候，波动率水平较高的时候波动率本身的波动更大。

读者会有疑问，用平方根过程或者对数正太过程表示方差过程是否有区别？在某些情况下是有区别的。毕竟，我们的对冲过程中会用到模型，模型应该可以模拟正确的到期日收益。如果到期日收益直接或间接地与波动率倾斜相关，而我们假设波动率方差倾斜与波动率整体水平独立，则会因为模型假设不符合市场实际情况而损失很多钱。

那么，使用随机波动率模型会比不使用任何模型好吗？答案是肯定的。虽然，我们使用一个错误的随机波动率模型可能会导致到期日收益是根据不符合实际的波动率倾斜生成的。但是，只用局部波动率模型生成的到期日收益是没有体现远期波动率倾斜的。下面我们会说明是为什么。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

8.2 局部波动率模型下的波动率倾斜动态

经验上讲，波动率倾斜随着剩余到期日的增加而下降。由前文可知，假设随机波动率是均值回复的情况下，BS隐含方差倾斜的期限结构看起来与公式（7.11）很像。特别地，波动率倾斜会随着时间衰退，其关于时间的行为由下式表示：

$$\frac{1}{\lambda' T}\left\{1-\frac{\left(1-\mathrm{e}^{\lambda' T}\right)}{\lambda' T}\right\}$$

回顾第1章的局部波动率关于隐含波动率的表达式公式（1.10）：

$$\nu_{loc}=\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial T}}{1-\dfrac{k}{\omega}\dfrac{\partial\omega}{\partial k}+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{k^2}{\omega}\right)\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial k}\right)^2+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial k^2}}$$

对上式求关于x的微分，只考虑 $\dfrac{\partial\omega}{\partial k}$ 的主要部分（对于较长的到期日T，这部分的值很小），我们得到：

$$\frac{\partial\nu_{loc}}{\partial k}\approx\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial\omega}{\partial k}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial T}\frac{\partial\omega}{\partial k}$$

这个式子表达的意思是，局部方差倾斜 $\dfrac{\partial\nu_{loc}}{\partial k}$ 会随着BS整体隐含方差倾斜 $\dfrac{\partial\omega}{\partial k}$ 衰变。

为了在局部波动率模型下，从局部波动率曲面获得远期波动率曲面，我们对局部波动率进行从估值日到到期日的积分，积分路径为股票价格现价和行权价之间的最可能路径，我们在第3章中介绍过。很明显，远期隐含波动率曲面更平缓，因为远期局部波动率倾斜更平缓。

将这一现象与随机波动率模型对比，在随机波动率模型下波动率倾斜几乎是时齐的。换句话说，局波动率模型下，未来的 BS 隐含波

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

动率曲面与当前相比会变平；随机波动率模型下，未来的BS隐含波动率曲面与今天看起来类似。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

8.3 随机隐含波动模型

很多作者假设整个隐含波动率曲面是分散的，包括：Brace、Goldys 、 Klebaner 和 Womersley （ 2001 ） ， Cont 和 da Fonseca （ 2002 ） ， Ledoit 、 Santa-Clara 和 Yan （ 2002 ） ，Schonbucher（1999）。如果假设标的资产价格过程是连续的（不带跳），隐含波动率曲面的静态和动态性质都会被限制。

特别地，不贴现的期权价格是未来现金流的风险中性期望，自然是鞅。看涨期权价格的变化反映了标的资产价格和隐含波动率的变化。利用看涨期权价格为鞅的性质，

$$\mathbb{E}[dC_t]=0$$

可以得到不同敏感度的紧密联系，很多类似公式（7.3）的结果随之而来。

Durreleman（2005）展示了在值状态附近、临近到期日时，如何从隐含波动率曲面动态中提取瞬时方差的动态。相反，给定一个随机波动率模型，他展示了如何推演隐含波动率曲面的形态。然而，为了得到这些令人印象深刻的结果，需要假设标的资产价格过程是连续的，但是我们早就知道，在解释波动率曲面形态时，在标的资产价格过程中引入跳是必要的。此外，Cont、da Fonseca和Durrleman（2002）指出隐含波动率曲面也存在跳，实际中期权交易员也观测到了这个现象。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

8.4 数字期权和数字Cliquets

为了更加深入地研究实际当中的衍生品合约定价问题，我们继续研究数字期权（Digital Option），因为这类产品的定价直接与隐含波动率曲线倾斜相关。

数字期权定价

在到期日T时，若股票价格S_T大于执行价K，数字看涨期权D（K，T）的到期收益为1，反之为0。数字期权可以看成是两个行权价格之差变成0的牛市价差：

$$D(K,T) = -\frac{\partial C(K,T)}{\partial K} \qquad (8.1)$$

其中，C（K，T）代表行权价为K、到期时间为T的欧式看涨期权价格。

由此可见，数字期权的价格对隐含波动率曲线的倾斜特别敏感。我们用σ_{BS}（K，T）表示Black-Scholes隐含波动率，将欧式看涨期权价格重写为：

$$D(K,T) = -\frac{\partial}{\partial K} C_{BS}(K,T,\sigma_{BS}(K,T))$$

$$= -\frac{\partial C_{BS}}{\partial K} - \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_{BS}} \frac{\partial \sigma_{BS}}{\partial K}$$

为了更好地理解波动率曲线倾斜在实际中的作用，我们以零利率、零分红情况下的一年期在值数字期权为例。进一步假设在值状态波动率为25%（以典型的标准普尔500指数为例），执行价格每变动10%，波动率曲线倾斜3%。则期权的价值为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$D(1,1) = -\frac{\partial C_{BS}}{\partial K} - \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma_{BS}} \frac{\partial \sigma_{BS}}{\partial K}$$

$$= N(-\frac{\sigma}{2}) - \text{vega} \times \text{skew}$$

$$= N(-\frac{\sigma}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{d_1^2}{2}} \times 0.3$$

$$\approx N(-\frac{\sigma}{2}) + 0.4 \times 0.3$$

如果忽略波动率倾斜的贡献，我们得到的数字期权价格会有本金12%的误差。

数字凯利期权

《金融风险管理词典》（the Dictionary of Financial Risk Management，Gastineau和Kritzman，1999）中给出了凯利期权（Cliquet）的部分定义：

法国人喜欢“cliquet”的读音，似乎想把这个词用在任何类似的期权结构上。（1）最开始用在一个多派息的定期重置期权上，或者叫棘轮期权（Ratchet Option）……

因为这个词源于法语，我们从法国网站 http：//lexique-financier.actufinance.fr 上摘抄了一段“Effet-cliquet”的优美定义：

M′ ecanisme qui permet de figer une performance mˆeme si l’actifcorrespondant baisse par la suite.[1]

图8.1展示了一个假想中的凯利期权的收益图。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

图8.1 凯利期权收益图。这个假想的标准普尔500指数凯利期权在每年10月31日重置成在值期权。粗实线代表了凯利期权的非零收益。相比之下，2000年10月31日开始的五年期在值欧式期权的收益为零，期权起始时标准普尔500指数点位为1429.40

在我们的说明中，凯利期权是执行价格在未来的一列时间上确定的一系列期权。特别地，数字凯利是执行价格在相应的重置日期被设定为最优股票价格的期权。将重置日期标记为$\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$，数字凯利在$t_i$时刻支付息券$\times \theta (S_{ti} - S_{ti-1})$，其中$\theta(\bullet)$是海维赛德函数（Heaviside Function）。

大家可以发现，零息债加上数字凯利期权对于风险厌恶的零售投资者来说是比较自然的产品。在标的股票指数表现好的阶段，他们获得比市场平均水平好的利息收入；反之，获得比市场平均水平差的利息收入。这样的产品流行并不令人惊讶，结果，很多权益类衍生品交易上的账簿上都有数字凯利期权。

继续分析，数字凯利期权的价格可能会随着不同卖方对模型假设的改变产生很大的变化。用局部波动率模型的卖方得到的数字凯利期权的价格，比用随机波动率模型（更确切地说，是相信远期波动率倾斜与当前波动率倾斜没有很大差别）的卖方得到的价格低。这样，使用不准确的定价模型的卖方肯定会赢得更多的生意，但结果却使自己以错误的定价卖出了未来开始的数字凯利期权的组合。更糟糕的是，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

某些卖方的定价模型可能是正确的，但是在销售人员的压力下，不得不把价格降到与竞争对手一样的水平。

数字凯利期权的定价误差会有多大？假设（并非不符合实际）有一个五年期的项目，如果标的资产超过前一年设定的值，年化收益率为6%，否则收益率为0。忽略第一次付的利息（因为我们假设所有卖方都能给当前时刻就确定的数字期权定价），误差可能是剩下的利息（48%）的12%，或者本金的5.76%。如此大量级的误差，会导致卖方要为这样的交易留存更多的保证金，并且有可能带来非常大的损失。

---

[1]在标的资产价格下降的情况下允许锁定利润的机制。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第9章 障碍期权

障碍期权是结构性产品的重要组成部分，但其估值对模型的依赖程度很高。因此，许多人写了这方面的书籍，比较有代表性的是：Taleb（1996），Wilmott（2000）和Carr、Chou（1997）。

尽管总结了所有相关论文，障碍期权价格的求解方法并不多，但是实际上，对于某种特定的障碍期权，不同交易商给出的价格可能差别非常大，有时候他们给出的买卖价格有可能是完全错开的（即，投资者可以在一个交易商处购买该期权，然后在另外一个交易商处卖出而获利）。所以，对于雄心勃勃的建模者来说，这个领域仍然有很大的研究空间。

考虑两个极端情况，障碍期权的定价是模型独立的。但是，某些障碍期权的价格对模型的依赖程度特别高。所以，在研究障碍期权时，除了得到期权定价，知道模型的定价结果是否可信同样重要。因此，我们将利用之前章节中所学的知识，理解随机波动率动态和局部波动率动态下不同障碍期权的定价问题。

和往常一样，我们假设所有行权价格和到期日对应的欧式期权都在市场上交易，我们的目标是使障碍期权与欧式期权在统一的模型下定价。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.1 定义

当标的资产价格达到某一预先设定的阈值时期权的价值变为零，这类期权叫做敲出期权。

存活期权（Live-out Option）是敲出期权的一个特例，当其敲出时，期权是深度实值的。

敲入期权只有当预先设定的阈值达到时才能行权。很明显，敲入期权等价于做空一个敲出期权和做多一个欧式期权的组合。

对于障碍期权而言，障碍被触碰时期权买方得到的钱叫做“回扣”（REbate）。“回扣”可能在障碍被触碰时支付，也可能在到期日支付。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.2 特殊情况

特殊合约

假设我们卖出一个看涨敲出期权，其障碍B等于执行价K、且低于股票现价S。假设对每份期权，我们买入一股股票对冲，收取S_0-K作为期权费。如果利率和分红率为零，这个对冲是完美的。为方便说明，假设障碍永远不会被触碰：看涨敲出期权的买方会行权，我们交割股票。净值变化的过程为-（S_T -K）+（S_0-K）+（S_T -S_0 ）=0。如果障碍被触碰，我们因为买入股票损失的S_0-K会被期权费补偿。

在这个特殊的情况下，敲出期权没有任何可选择性。Delta是1，Gamma是0，Vega也是0。定价结果是完全模型独立的；唯一的要求是，股票没有持仓成本。

现在我们来仔细想想，这个资产组合的本质是什么。只要股票价格一直在障碍之上，我们的收支就是平衡的；如果障碍被触碰，期权敲出，我们将持有为了对冲而买入的股票头寸。两种合约是完全不同的，未敲出的障碍期权保证了股票以确定的价格交割；而期权敲出后，常规的股票止损单只能尽早执行（通常比障碍价格低一些）。如果按照传统的模型假设交易是连续的，两种情况就没有什么不同。在真实世界中，敲出期权的价格要定得高一点，以补偿股票价格达到障碍时出现跳空的风险。业界工作者在计算障碍期权价格时，会通过移动障碍进行风险补偿，移动的幅度是原来的障碍被触碰时的期望跳空幅度。

总之，在K=B＜S_0这个特定情况下，看涨敲出期权的价格为股票现价与执行价的差S_0-K加上一点跳空风险补偿。

现在，如果执行价K和障碍B不相等，且满足B≤K≤S_0 ，我们会很自然地认为，敲出看涨期权的Gamma和Vega值不会比执行价为K的欧式看涨期权高。我们也不会觉得这样一个敲出期权的价格会对模型非常敏感（当然，模型会假设敲出期权与欧式期权在统一的框架下定价）。观察结果表明，事实确实是这样的。**欧式看涨上限期权**

我们要考虑的下一个特殊情况是欧式看涨上限期权。该看涨期权的执行价为K，如果在到期日之前标的资产价格触碰到B，期权行权，并支付内在价值B-K。

如果障碍距离股票现价S_0非常远，看涨上限期权的价格不会和常规的看涨期权相差很多。为了方便说明，假设现在有一个资产组合，

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

其中包含执行价为K（与股票现价S_0差不多）的欧式看涨期权多头和看涨上限期权的空头。如果障碍没有被触碰到，投资组合到期时不产生费用。如果障碍被触碰到了，投资组合就变成了欧式期权多头和现金B-K的空头。欧式看涨期权的时间价值不会很高，因为我们假设$B>>S_0$，而且障碍被触碰的时间应该与到期日非常接近。因为欧式看涨上限期权的价格与欧式看涨期权的价格非常接近，其价格不应该对模型有很强的依赖性，而且应该可以用一个比较接近Black-Scholes的模型（没有波动率倾斜）和相应的欧式期权隐含波动率近似。

基于对看涨上限期权定价的理解，我们现在准备研究存活期权定价问题。所以我们只需要研究回扣的定价和对冲（单一触碰期权，One-Touch Option）就可以得到存活期权定价与对冲的思路。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.3 反射原理

我们假设股票价格服从零漂移项、波动率为常数的随机过程，即：

$$dx = \sigma dZ \qquad (9.1)$$

其中，x：=log（S/K）。

在这个特殊情况下，执行价为B欧式二元期权价格与执行价为B的单一触碰期权价格有一个简单的关系。

考虑（9.1）中零漂移项随机过程的实现过程，如图9.1实线部分所示。由于问题的对称性，虚线路径与实线路劲发生的概率相等。股价触碰障碍的概率等价于股价在到期时低于障碍的概率的二倍。换个角度想，单一触碰期权的价格刚好是欧式二元看跌期权价格的二倍。

为了使结果看起来更详尽，如果障碍是在值的，它被触碰的概率是100%，但是最后价格落在障碍之下的概率为50%。按照一般的猜测，我们会假设单一触碰期权价格对欧式二元期权价格的比率是$B(S_0)^{-1}$，其中B（K）代表执行价为K的欧式二元看跌期权的价格。

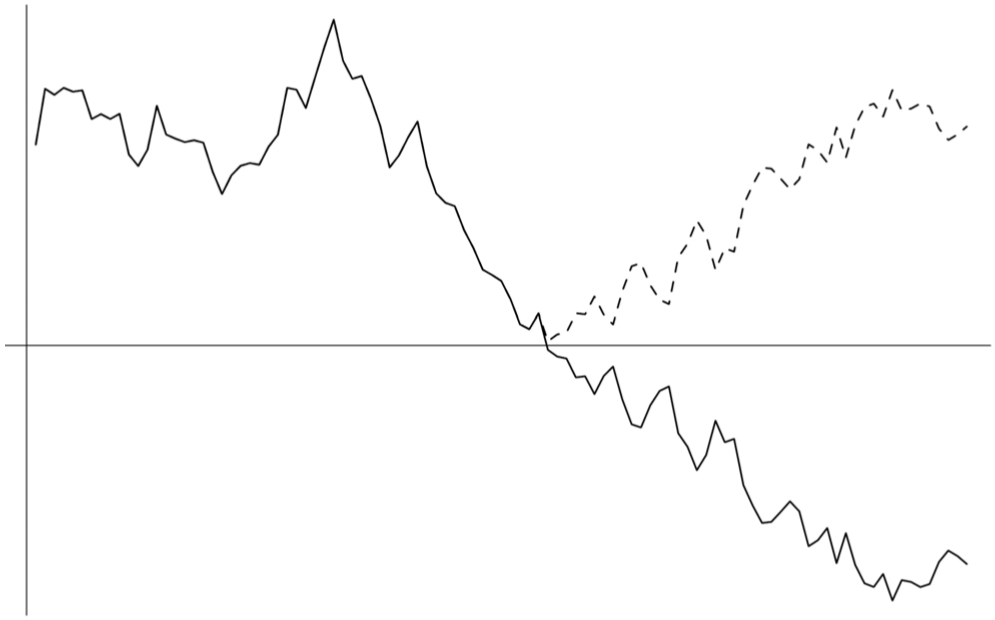


图9.1 对数漂移项为零的随机过程的实现及其反射路径

如果这个猜测是正确的，对Heston-Nandi模型，采用第4章的参数（$v=0.04$，$v=0.04$，$\lambda=10$，$\eta=1$，$\rho=-1$），其中$B(S_0)=0.54614$，单一触碰期权价格对欧式二元期权价格的比率大约是B（S_0

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

）$^{-1}$=1.831 。图 9.2 画出了该比率在障碍不同时的值，如 Taleb（1996）强调的一样，其值对模型假设非常敏感。虽然我们的猜测对局部波动率模型而言是准确的，然而对随机波动率却很不准确。

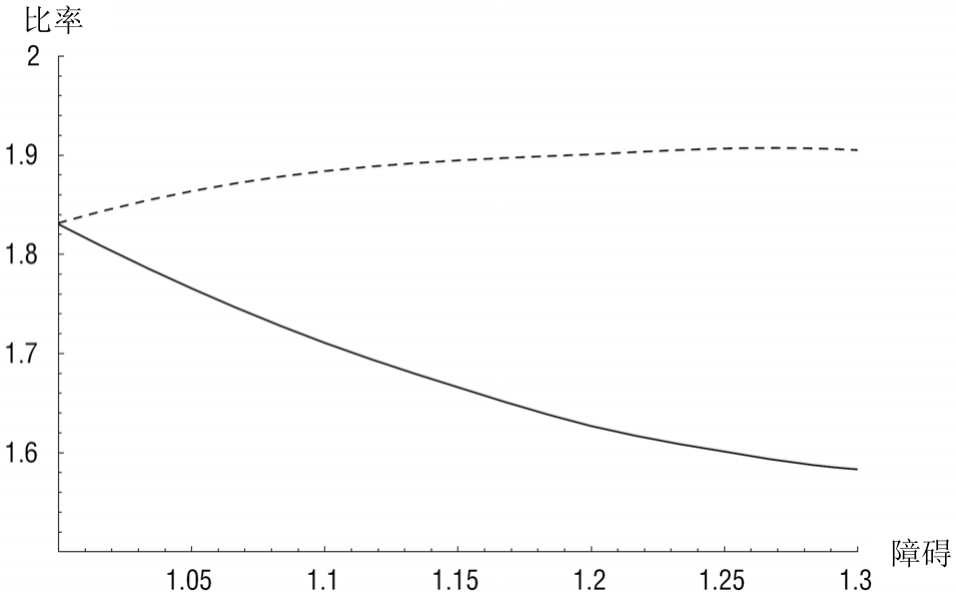
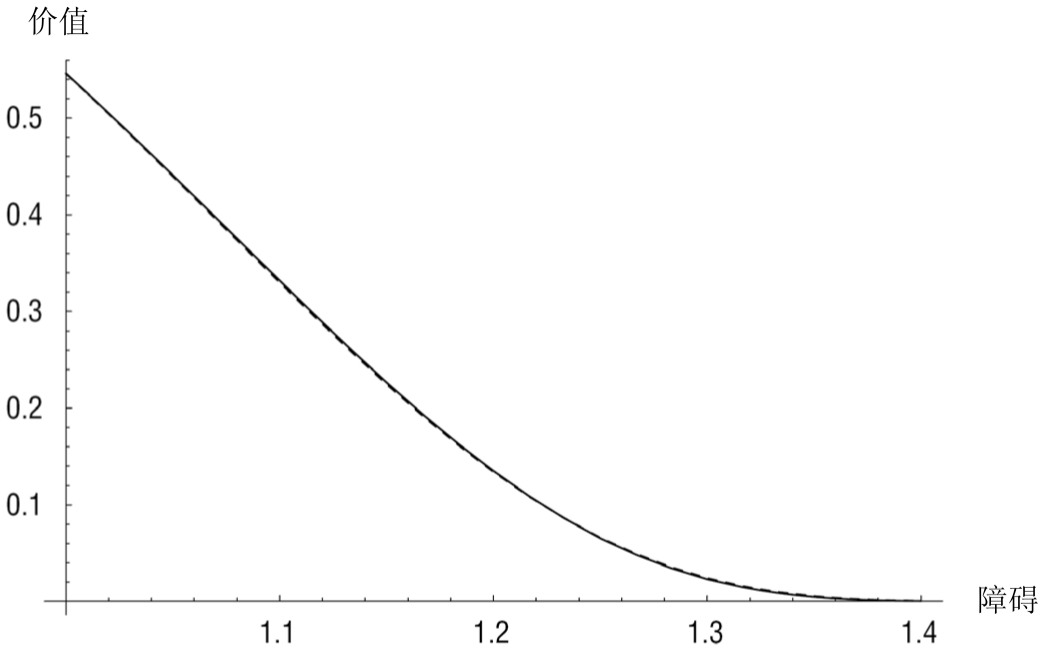


图9.2 随机波动率模型下和局部波动率模型下，单一触碰期权价值比上欧式二元看涨期权价值的比率关于执行价的函数。实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况

为了对比，考虑模型假设对欧式二元看涨期权价格的影响。由图 9.3 可以看出，模型假设对欧式二元期权价格没有影响，它是模型独立的，只与传统欧式期权的价格有关（在这里，它是牛市价差的极限形式）。



全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

图9.3 随机波动率模型和局部波动率模型下，欧式二元看涨期权的价值关于执行价的函数。实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况。两条线几乎没区别

最后，我们在图 9.4 中画出了在随机波动率模型和局部波动率模型下，单一触碰期权关于执行价的函数。

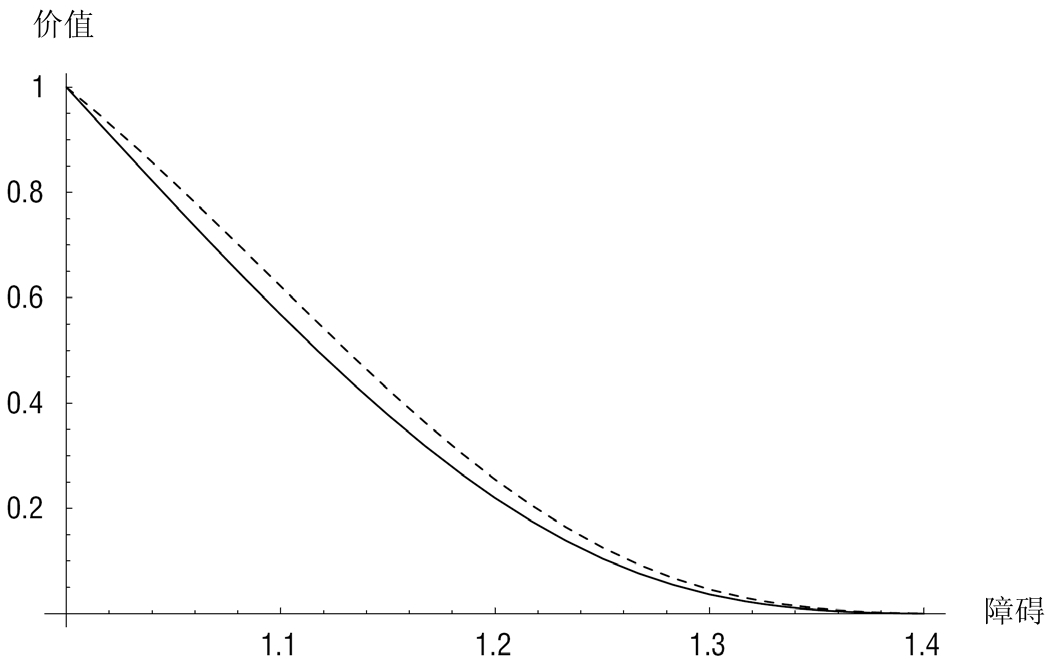


图9.4 随机波动率模型和局部波动率模型下，单一触碰期权的价值关于障碍水平的函数。实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.4 回溯对冲法

Goldman、Sosin 和 Gatto（1979）提出了一种对冲方法，现在用来估计回溯期权组合的定价和对冲。看涨回溯期权是在到期日支付（S～-K）$^{+}$的期权，其中，S～是期权存续期内股票价格的最大值，K是执行价。

我们再次使用零分散项和常数波动率，假设我们通过持有两张执行价为K的传统欧式期权在对冲回溯看涨期权的空头。如果股票价格从来没有到达过K，欧式期权和回溯期权的价值都为零。如果在期权存续期内股价触碰到K，随后以增量ΔK小幅度增长，回溯期权的价格也以增量ΔK小幅度增长（因为K+ΔK是新的最大值）。新的回溯期权必须支付ΔK+（S～-（K-ΔK））$^{+}$-另外一个执行价更高的回溯期权的到期日收益、加上固定的现金流ΔK。

假设我们用两张看涨期权对冲是正确的，新的对冲组合必须是两张执行价为K+ΔK的看涨期权。所以我们要重新调整对冲头寸，即卖出两张执行价为K的看涨期权、买入两张执行价为K+ΔK的看涨期权。调整头寸获得的利润为：

$$
\begin{aligned}
2C(K+\Delta K,K)-2C(K+\Delta K,K+\Delta K) &\approx -2\left.\frac{\partial C}{\partial K}\right|_{S=K}\Delta K \\
&= 2N(d_2)\,|_{S=K}\,\Delta K \\
&= \Delta K
\end{aligned}
$$

利用了零分散项时N（d_2）$|_{S=K}$ =1/2的事实。

调整头寸获得的利润刚好是回溯期权要支付的到期收益，我们的对冲是完美的。

单一触碰期权

现在考虑执行价为B的单一触碰期权的价格。它是股票最大价格大于B的概率。令执行价之间的间距非常小，可以通过求回溯期权牛市价差的极限获得单一触碰期权的价格。因为回溯看涨期权与两张欧式看涨期权价格相同，回溯期权牛市价差的价格一定是欧式期权牛市价差的二倍。对看跌期权而言，当漂移项为零时，一个单一触碰期权的价格等于两个欧式二元期权的价格。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.5 平价公式

我们现在假设利率和分红率为零、波动率是常数（与零漂移项的假设相反）。在此情况下，通过观察Black-Scholes公式，我们有：

$$C\left(\frac{B^2}{S},K\right)=\frac{K}{S}P\left(S,\frac{B^2}{K}\right)$$

由众多包含敲出期权显式解的文献中的一篇，我们推导出：

$$DO(S,K,B)=C(S,K)-\frac{S}{B}C\left(\frac{B^2}{S},K\right)$$

$$=C(S,K)-\frac{K}{B}P\left(S,\frac{B^2}{K}\right)$$

其中，DO（·）代表向下敲出看涨期权的值。

令S=B，并代入上式，和我们预期的一样，得到DO（B，K，B）=0。所以，在这个特殊情况下，向下敲出看涨期权存在静态对冲组合，组合中包含相同执行价的欧式看涨期权多头和 $\frac{K}{B}$ 份执行价为K′=B ^{2}/K的欧式看跌期权空头。

这个静态对冲可行的原因是，在股票价格达到障碍B时，看涨期权多头的价值总能抵消看跌期权空头的价值。

B=K是这个特殊情况下的特例。在此情况下，我们有：

$$DO(S,K,K)=C(S,K)-P(S,K)=S-K$$

又一次印证向下敲出看涨期权的价值仅为内在价值，与一个包含股票多头和K份债券空头的投资组合有相同的到期收益。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.6 准静态对冲和定性估价

我们可以将之前章节中的静态对冲过程扩展到利率、分红率、波动率任意结构的情形。虽然在一般情况下我们不能得到精确的静态对冲，但是可以构建一个在所有合理的情形下到期收益较小的投资组合。

Avellaneda、Levy和Paras（1995）提出了此过程的成熟版本——拉格朗日不确定波动率模型。在此模型中，波动率是有界但不确定的；假设资产组合的Gamma为负时，波动率高，Gamma为正时，波动率低。因此，仓位的方向不同（做多或做空）会使得生成的价格不同（产生了买卖价差）。通过调整资产组合中欧式期权的占比，使得由奇异期权（如障碍期权）和欧式期权构成的资产组合的买卖价差最小。这样，只要波动率保持在一定范围内，我们就可以得到保证盈利所需要的最优对冲和最小买卖价差。

更实际的做法是用准静态对冲的想法来确定模型假设对任意类似障碍期权的合约价格的影响。这个想法的第一步是确定准静态对冲的形式，然后弄清楚在不同股票价格和波动率的情形下对冲表现如何——在脑海中做一下蒙特卡洛模拟。下面我们要用一些例子说明这一过程。

虚值障碍期权

具体一点，假设我们卖出执行价为K的看涨期权，该期权在触碰障碍B＜K时敲出，准对冲组合由执行价为K的欧式看涨期权多头和虚值欧式看跌期权（漂移项为零时，执行价为B^2/K）空头组成。

如果障碍没有被触碰，很明显，该对冲是完美的。如果障碍被触碰了，对冲组合中虚值欧式看涨期权和虚值欧式看跌期权的值取决于波动率倾斜。根据第8章中我们对波动率曲面动态的讨论，我们知道按照第 4 章中给出的参数设置Heston-Nandi模型，局部波动率模型下波动率曲线比随机波动率下的波动率曲线更平坦。我们得出结论，当障碍被触碰时，对冲组合的价值在局部波动率模型下比在随机波动率模型下价值高。然而，两个期权都是虚值期权，所以我们认为波动率倾斜的影响不会很大。所以我们猜测，虚值的敲出看涨期权在局部波动率模型下的价格比随机波动率模型下的价格低（因为对冲的净成本低）。图9.5支持了我们的猜测。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

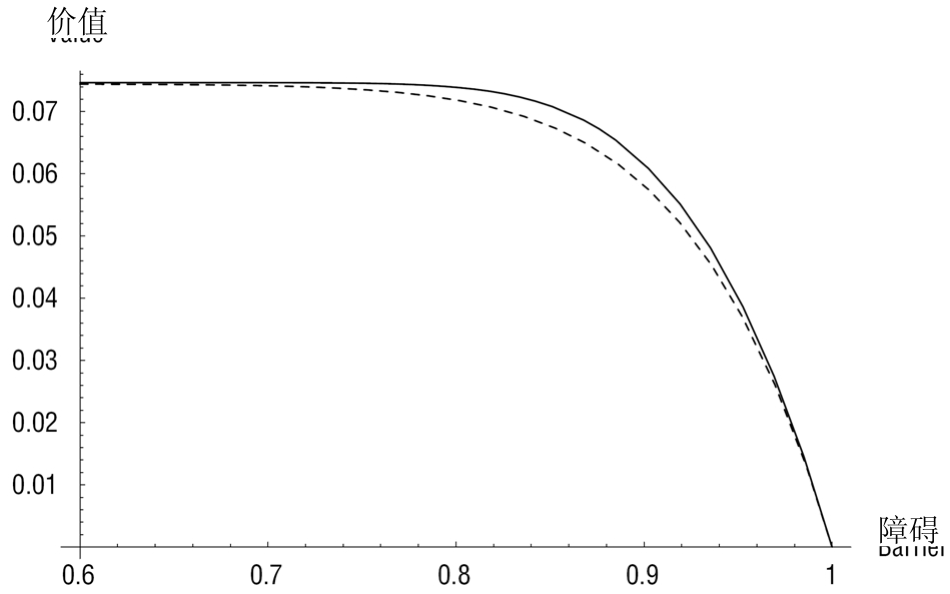


图9.5 执行价为1的敲出看涨期权价值关于障碍水平的函数。实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况

单一触碰期权

当某一上方障碍被触碰时，单一触碰期权向持有方支付指定金额。假如我们我们卖出了执行价为B＞S的单一触碰期权。准静态对冲组合应该是一组执行价为B的欧式二元看涨期权多头。如果障碍没有被触碰，这个对冲组合是可以的。用第4章中的Heston-Nandi参数，当障碍被触碰时，局部波动率模型下的波动率曲线比随机波动率模型下的波动率曲线平坦。由此可知，随机波动率模型下二元看涨期权价值更高。这是因为，单一触碰期权在随机波动率模型下的对冲成本比在局部波动率模型下的对冲成本低，所以随机波动率模型下的估值更低。图 9.4很好地解释了这个现象。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

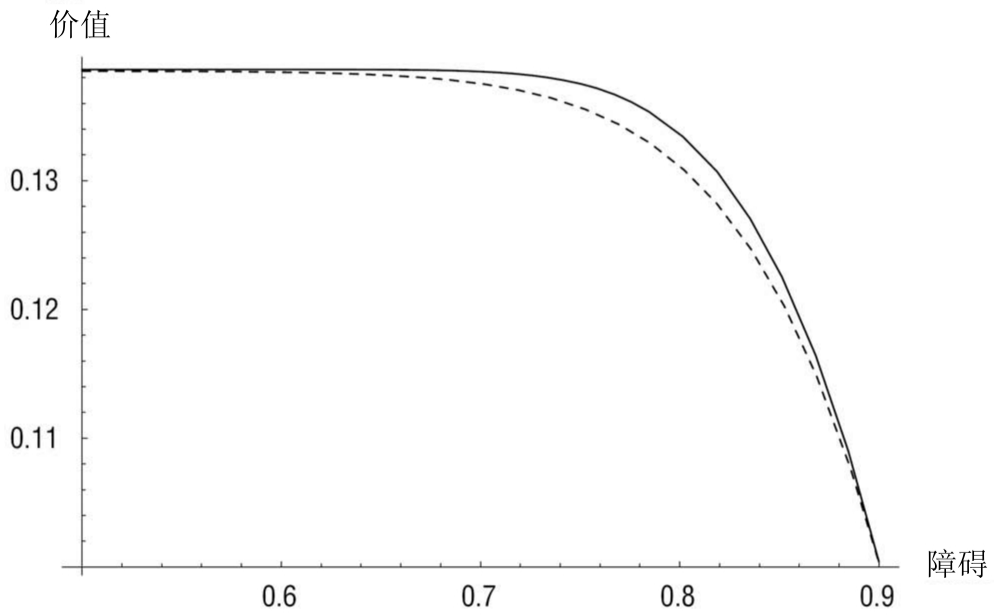


图9.6 执行价为0.9的敲出看涨期权价值关于障碍水平的函数。实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况

存活期权

像从前一样，我们将存活看涨期权表示为上限看涨期权减去一个单一触碰期权。我们再次猜测，上限看涨期权的价格在随机波动率和局部波动率模型下表现一致。另外，由之前的讨论可知，在采用了第4 章的参数的 Heston-Nandi模型下，我们预期单一触碰期权在随机波动率模型下的价格比在局部波动率模型下的价格低。

总结一下，Heston-Nandi模型采用第4章给出的参数时，存活期权在随机波动率模型下的价格比在局部波动率模型下的价格高。图 9.7 支持了这一观点。不同模型假设下得到的价格差别是非常大的。

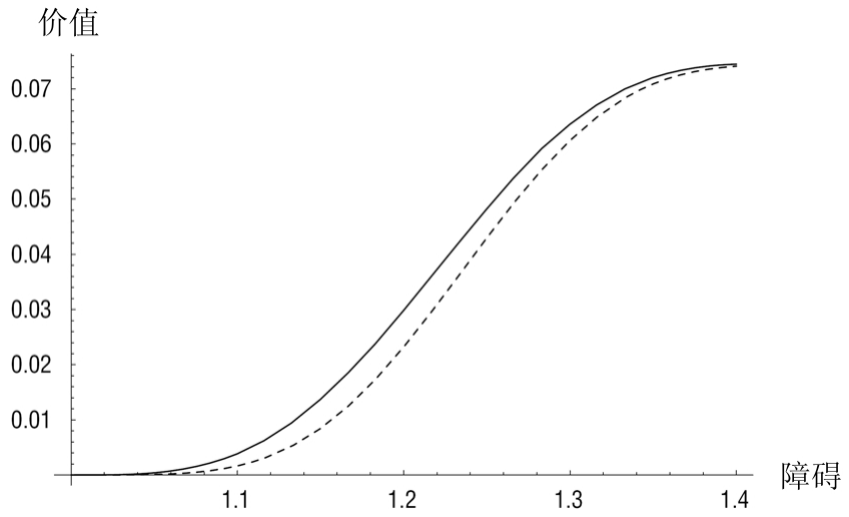


图9.7 执行价为1的存活看涨期权价值关于障碍水平的函数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况

回溯期权

假设卖出执行价为K＞S的回溯看涨期权。对冲组合是两份执行价为K的欧式看涨期权。如果股票价格从来没有到达过K，这个对冲是完美的。当股票价格触碰到K时，我们需要卖出两份执行价为K的欧式看涨期权，买入两份新的执行价为K+ΔK的看涨期权。等价于卖出两份牛市价差。再次使用参数为第4章中给出的Heston-Nandi模型，相比于局部波动率模型，随机波动率模型下的波动率曲线倾斜程度更大。在随机波动率模型下我们可以通过牛市价差赚更多的钱。总结一下，Heston-Nandi模型采用第4章给出的参数时，回溯看涨期权在随机波动率模型下的价格比在局部波动率模型下的价格低。图 9.8 支持了这一猜测。仔细观察，我们发现随机波动率模型下的价格与局部波动率模型下的价格之比会随着执行价的上升而下降。因为在平均情况下，执行价越高，期权起始时间与第一次调整对冲头寸的时间间隔越大。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.7 针对离散监测的调整

实际中有一个问题值得注意，即障碍期权的监测是离散的。一般情况下，只有收盘时才会观察障碍期权障碍的情况。我们如何估计这一现象对障碍期权价格的影响程度呢？

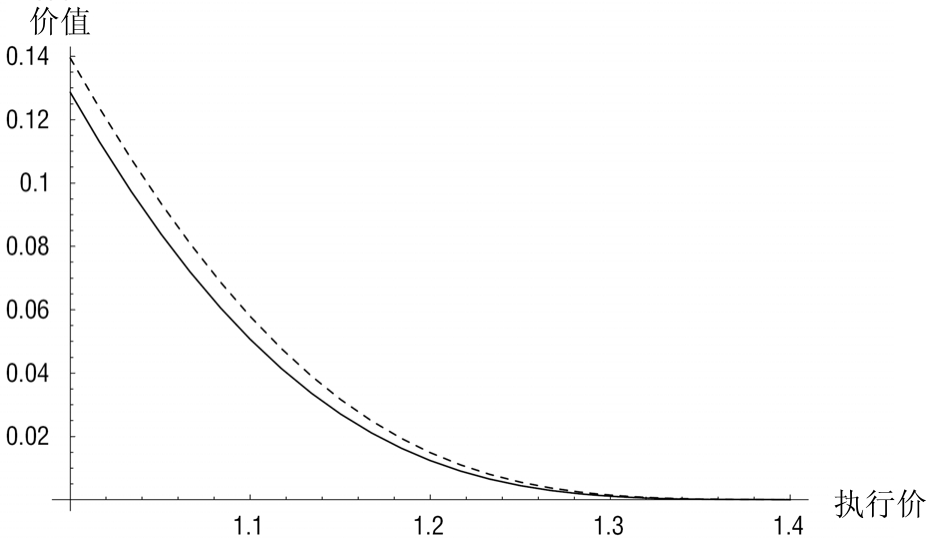


图9.8 回溯看涨期权价值关于执行价的函数。
实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况

我们可以从回溯期权的知识中获得修正量的量级的直观估计。不失一般性，假设一个离散障碍期权每天被监测一次。考虑离散最大值被达到的那天，连续最大值在同一天达到的概率很大。在那天一开始，股价到达的最大值和股价终值差距的期望，就是一个价格几乎是一日期欧式期权的二倍的回溯期权，或者：

$$2\frac{\sigma\sqrt{\Delta T}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.8\sigma\sqrt{\Delta T}$$

然后，分别用$\tilde{V}(B)$和V （B）代表上方障碍为B的、离散检测和连续检测的障碍期权的价格，我们有：

$$\tilde{V}(B) \approx V\left(Be^{0.8\sigma\sqrt{\Delta T}}\right)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

实际上，Broadie、Glasserman和Kou（1999）证明了下面的定理：

令V （B）为连续检测的障碍期权的价格，V_m （B）是同一个、但是只在m个时间点上进行监控的障碍期权。我们有如下近似表达式：

$$V_m(B) = V(B\,\mathrm{e}^{\pm\beta\sigma\sqrt{T/m}}) + o(1/\sqrt{m})$$

其中，+代表上方障碍期权，-代表下方障碍期权，常数：

$$\beta = -\frac{\zeta(1/2)}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.5826$$

其中，ζ是黎曼Zeta函数。

证明过程的思路是，估计离散检测时股票价格第一次超过障碍时超出障碍的幅度。超出障碍的幅度约等于 $B\mathrm{e}^{\pm\beta\sigma\sqrt{T/m}} - B$ 。

离散监测和连续监测的障碍期权价格往往差距较大。例如，当σ=0.32、每

天监测时（$\sqrt{\Delta T} \approx 1/16$），调整幅度约为 $\frac{0.32\times0.6}{16}=0.12$ （障碍水平的1.2%）。**离散监测的回溯期权**

由之前的结果可以推断出，连续观测时股价的最大值和离散监测时股价的最大值的期望存在一定关系。Broadie、Glasserman和Kou（1999）证明了这一事实。他们在文章中给出：

$$\mathbb{E}[\hat{S}_T] = \mathbb{E}[\tilde{S}_T]\mathrm{e}^{-\beta\sigma\sqrt{\Delta T}} \qquad (9.2)$$

其中，$\hat{S}$ 是离散监测时股价的最大值，$\tilde{S}$ 是连续观测时股价的最大值，ΔT是监测的时间间隔。

在值的回溯期权 $\hat{L}(S_0,T)$ 在到期日支付离散最大值与股价初值的差额。重写公式（9.2）得：

$$\begin{aligned}\hat{L}(S_0,T) &= \mathbb{E}[\hat{S}_T - S_0] \\ &= \mathbb{E}[\tilde{S}_T]e^{-\beta\sigma\sqrt{\Delta T}} - S_0 \\ &= \tilde{L}(S_0e^{-\beta\sigma\sqrt{\Delta T}},T) - S_0\left(1-e^{-\beta\sigma\sqrt{\Delta T}}\right)\end{aligned}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

其中，$\tilde{L}$是等价的连续监测的回溯期权。其他类型回溯期权定价的调整公式可以在Broadie、Glasserman和Kou（1999）中查阅。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.8 巴黎期权

如Taleb（1996）所描述的，连续监测的障碍期权会诱导参与者（无论是期权的卖方还是买方）影响标的股票价格。离散监测的障碍期权也存在同样的问题。一个既保留障碍期权好处、又尽量避免股价操控风险的方式是，在障碍期权的条款中规定，标的股票价格需超出障碍并保持一段时间，期权才被敲入（或敲出）。这种改良的障碍期权，叫巴黎期权（Parisian Option）。巴黎期权的另一个优点是，比起条件相同的非巴黎期权，其风险因子不那么极端。

类似条款在可转换债券或期权的体量相对于流通股票而言比较大的衍生品中较为常见。

在常数参数的假设下，应用布朗运动偏移过程的相关结果可以得到几乎显式的巴黎期权定价公式（参考第12章中Revuz和Yor（1999）的例子）。然而，在一般情况下，大多数的障碍期权定价问题都是用偏微分方程数值解法算出的，参考Tavella和Randall（2000）。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.9 障碍期权的应用

阶梯期权

考虑一系列执行价为B_i的上限上涨期权，B_i严格递增且比股价初值S_0大。执行价为B_i的期权的上限是B_{i+1}，在障碍被触碰时，期权支付金额为$B_{i+1}-B_i$的回扣。对于购买这个期权的投资者来说，每次障碍被触碰，其收益都是固定的。即使股价回调，这些收益还在。这种结构在个人投资者中非常流行。在上限离执行价非常近的极限情况下，阶梯期权约等于回溯期权（每次股价上涨的时候，收益都被锁定），阶梯期权的价格约等于欧式期权价格的两倍。通常情况下，阶梯期权的障碍是每隔10%设一档，价格大概是其对应的欧式期权的1.5倍。

区间期权

另外一种流行的结构是，对于每个交易日而言，如果股价在一段时间里保持在一个区间内，期权支付高额的券息；一旦边界被触碰，马上停止付息。这是单一触碰双障碍期权结构。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

9.10 结论

障碍期权的定价对模型假设的敏感度很高，在调整期权价格时必须把这一点考虑在内。尽管如此，我们可以通过掌握一些已经被很好地理解的极限情况，对任意给定的障碍期权的定价和对冲组合有定性的理解。因为障碍期权价格的不确定性和对冲的复杂性，市场人士往往不愿意给出障碍期权的报价。我们在本章中说明了这种不情愿并不一定有道理——有时候障碍期权比欧式期权风险小、且更容易定价。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第10章 奇异凯利期权

有一些期权合约是依赖远期波动率曲线的，凯利期权就是最明显的例子。在第8章中，我们给出了两个简单的凯利期权的例子。凯利期权是一系列远期开始的期权的集合，期权的期限在重置日确定。最简单、最常见的凯利期权是一系列远期开始的在值欧式期权的组合。

在本章中，我们会介绍一些奇异凯利期权的例子。为了使讨论更具体，我们具体讨论了Mediobanca S.p.A发布的三个具体的合约：局部封顶、全局封底凯利（Locally Capped Globally Floored Cliquet）、反向凯利（Reverse Cliquet）和拿破仑（Napoleon）。Mediobanca 发布了很多不同类型的结构化债券，其网址（http：//www.mediobanca.it）上公布了一系列奇异期权结构的详细文档。此外，某些产品的交易已经成熟，我们可以估计它们的历史表现。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

10.1 局部封顶、全局封底凯利

合约“Mediobanca Bond Protection 2002-2005”（ISIN IT0003391353）以道琼斯欧元区斯托克50指数为标的（Dow Jones EURO STOXX 50 index）、保证本金赎回、且在每年12月2日支付年度票息：

$$\max\left[\left\{\sum_{t=1}^{12}\min\left(\max(r_t,-0.01),+0.01\right)\right\},MinCoupon\right]$$

其中，MinCoupon=0.02，每月的回报r_t由下式给出：

$$r_t=\frac{S_t-S_{t-1}}{S_{t-1}}-1$$

其中，S_t是欧元区斯托克50指数在第t个月重置日期时的水平。该合约将年化收益率限制在12%.与2%.之间，所以叫局部封顶、全局封底的凯利。

根据文件规定，票息在每年12月2日支付。除了最后一个计息日是11月25日（比票息支付日早一个星期）以外，其余的计息日都是12月2日。

如果合约不保证最小的年化收益率，这一特定的 Mediobanca 合约就变成一系列一个月期的在值牛市价差（根据不同情况，也可能是熊市价差）。全年的收益下限为2%，每个月的收益上限为1%。直觉告诉我们，即使没有全局下限，这个结构的表现也会类似于一系列牛市价差；加上一个全局下限相当于将每个价差的较低的执行价格提高。我们猜测，这一结构会对远期波动率曲线的假设非常敏感。因此，我们预计在局部波动率模型下，该合约价值被低估，因为局部波动率模型生成的远期波动率曲线非常平坦（波动率曲线的负倾斜程度越大，牛市价差的价值越高）。

Heston模型和局部波动率模型下的定价

为了理解凯利期权价格对模型假设的依赖性，我们采用第4章中的参数，在Heston模型和局部波动率模型下生成蒙特卡洛模拟的路径[1]。这并不表示采用第4章中参数的Heston-Nandi给出的价格会与债券发行时（12月2日，2002）得到的价格差距很大。我们这么做只是为了排除模型假设的影响。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

图10.1展示了Heston-Nandi参数下，收益下限MinCoupon为不同值时，该结构产品的价值。Heston-Nandi参数：

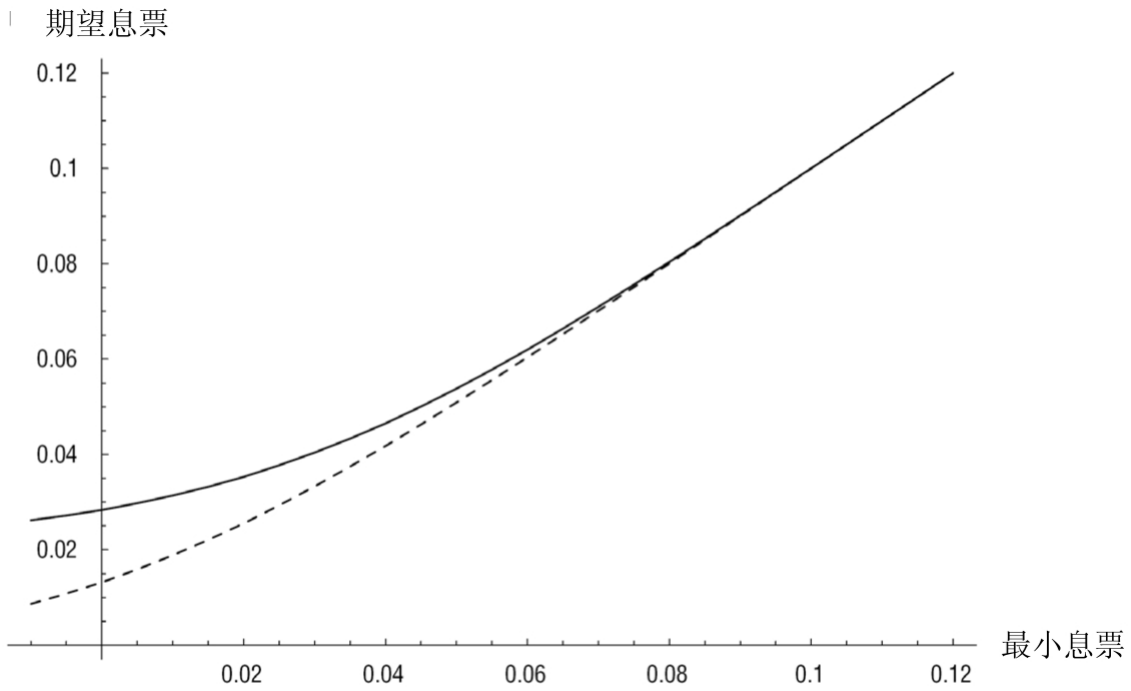
$$\nu = 0.04; \bar{\nu} = 0.04; \lambda = 10; \eta = 1; \rho = -1$$

在局部波动率模型下，根据第4章给出的Heston模型下局部波动率的近似表达式：

$$\nu_{loc}(x_T, T) = \max\left[\left(\nu - \bar{\nu}'\right)\mathrm{e}^{-\lambda' T} + \bar{\nu}' - \eta x_T \left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda' T}}{\lambda' T}\right\}, 0\right]$$

其中，$\lambda' = \lambda + \eta/2$，$\nu' = \nu\lambda/\lambda'$。跟往常一样，我们假设利率和分红率为零。

我们的直觉是正确的。当收益下限MinCoupon为 2%时，Heston 模型下的期望息票为 3.53%，局部波动率模型下的期望息票为 2.55%，在零利率和零分红率的假设下，定价的差距为3×0.98%=2.94%。相比于奇异期权卖方所获得的利润，3%是个很大的数字：可能比全部利润都大！产品的收益上限为12%，所以当收益下限MinCoupon为12%时，Heston模型和局部波动率模型下的的期望息票相等，图 10.1 显示确实如此。当收益下限MinCoupon为-1%时，该结构变成一系列欧式期权牛市价差组合，价格对远期波动率曲线的敏感度（即Heston和局部波动率模型下的定价差别）达到了极大的状态。



全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

图10.1 合约“Mediobanca Bond Protection 2002-2005”局部封顶、全局封底凯利期权的价值（减去保证能够赎回的金额）关于最小息票的函数。实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况

产品表现

图10.2中画出了这只债券的历史表现示意图。

图10.2 合约“Mediobanca Bond Protection 2002-2005”局部封顶、全局封底凯利期权的历史表现。垂直的虚线代表重置日期，垂直的实线代表息票重置日期，水平的实线代表固定的点位

债券息票的历史表现记录在表10.1中，反映了来自大概12个独立封顶、封底收益的有效平均表现——它们与无风险利率非常接近[2]。实际上，发行日（2002年12月2日）当天的三年期欧元区年化互换利率为3.59%。对于投资者来说，购买这样的机构赚钱和亏钱都不容易。

表10.1 估计的“Mediobanca Bond Protection 2002-2005”的息票

定息日	息票
11/25/2003	3.91%
11/25/2004	3.55%
11/25/2005	4.14%

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

10.2 反向凯利

合约“Mediobanca 2000-2005 Reverse Cliquet Telecommunicazioni”（ISINIT0001458600）以一揽子电信行业股票为标的、保证本金赎回、且在期末支付额外收益P：

$$P = \max\left[0, MaxCoupon + \sum_{i=1}^{10} \min\left[0, r_i\right]\right]$$

其中，每半年的收益r_i为：

$$r_i = \frac{basket_i - basket_{i-1}}{basket_i}$$

其中，MaxCoupon=100%。

我们注意到，所有这类结构都是保本的，但是收益取决于标的指数的表现。此例中，没有按周期支付的利息。取而代之的是（这也是典型的结构），按周期计算收益，最后赎回时一起支付。此例中，可达到的最大赎回额度为Principal+MaxCoupon=200%。

如果不保证本金的赎回，这个Mediobanca结构化产品就变为一系列六个月期在值看跌期权的组合；投资者可以通过做空一揽子看跌期权获得这一产品结构。这一结构被称为反向凯利，因为只有负收益会对最后的收益产生贡献。因此，假设该结构对波动率倾斜的依赖程度较小是公平的。实际中，这种情况并不常见，几乎每个反向凯利都有局部上限和局部下限，与上一个例子一样。保证本金赎回的结构相当于设置了全局下限。

Heston模型和局部波动率模型下的定价

图10.3给出了收益上限MaxCoupon为不同值时，该结构在Heston模型和局部波动率模型下的定价，Heston-Nandi模型仍然选用了第4章的参数。我们的直觉是正确的。该结构在随机波动率模型和局部波动率模型下的定价并没有很大差别。当MaxCoupon=100%时，Heston模型下的期望赎回收益率为43.9%，局部波动率模型下的期望赎回收益率为42%。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

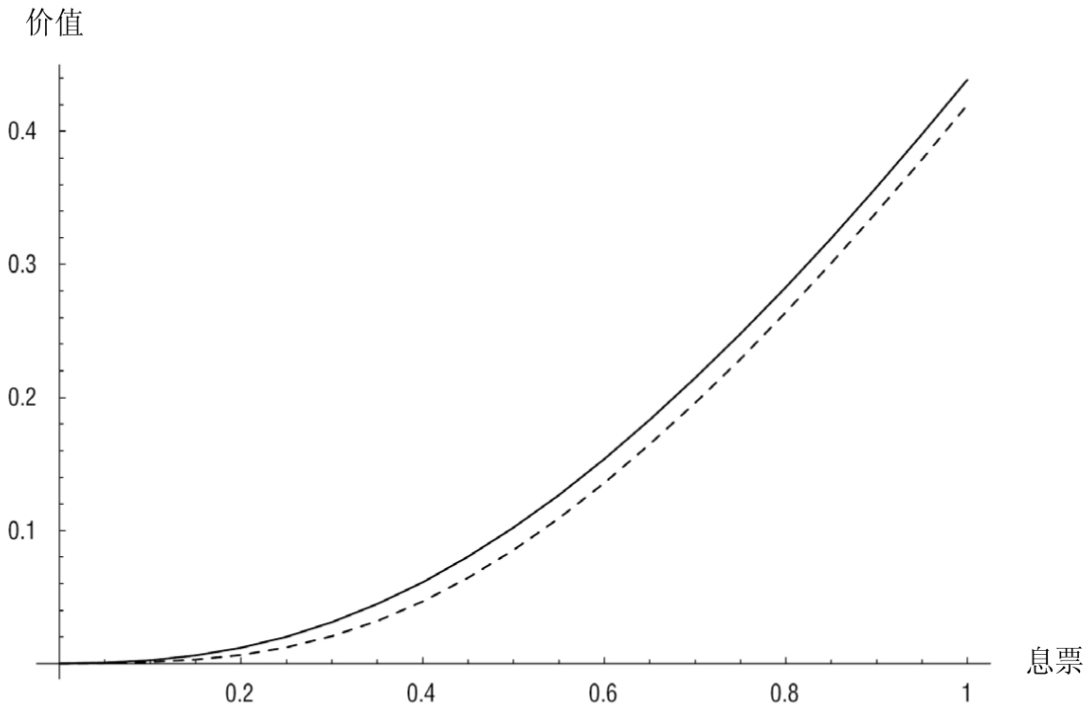


图10.3 Mediobanca反转凯利（减去保证能够赎回的金额）的价值关于最大息票的函数。实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况

再仔细检查，我们发现该结构在随机波动率模型下的定价一直比局部波动率模型下的定价低。这是因为，虽然投资者相当于卖空了一揽子在值看跌期权，他也同时持有了全局下限的多头，相当于一揽子虚值看跌期权。这一全局下限在随机波动率模型下的价值比在局部波动率模型下高，反映了局部波动率模型下远期波动率曲线更平坦的现象。

产品表现

图10.4画出了该结构化债券的历史表现示意图。2000年之前的数据是为了提供历史背景。我们看到，从发行日起全球电信行业股票从该年早起达到的峰值大幅持续下跌。可以想象，大部分投资者都没有预见到，从发行日至今一揽子电信行业股票的跌幅已经达到70%，最差的时候跌幅达到83%。投资者应该谨记一句交易箴言：“不要试图去接下落中的刀子”。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

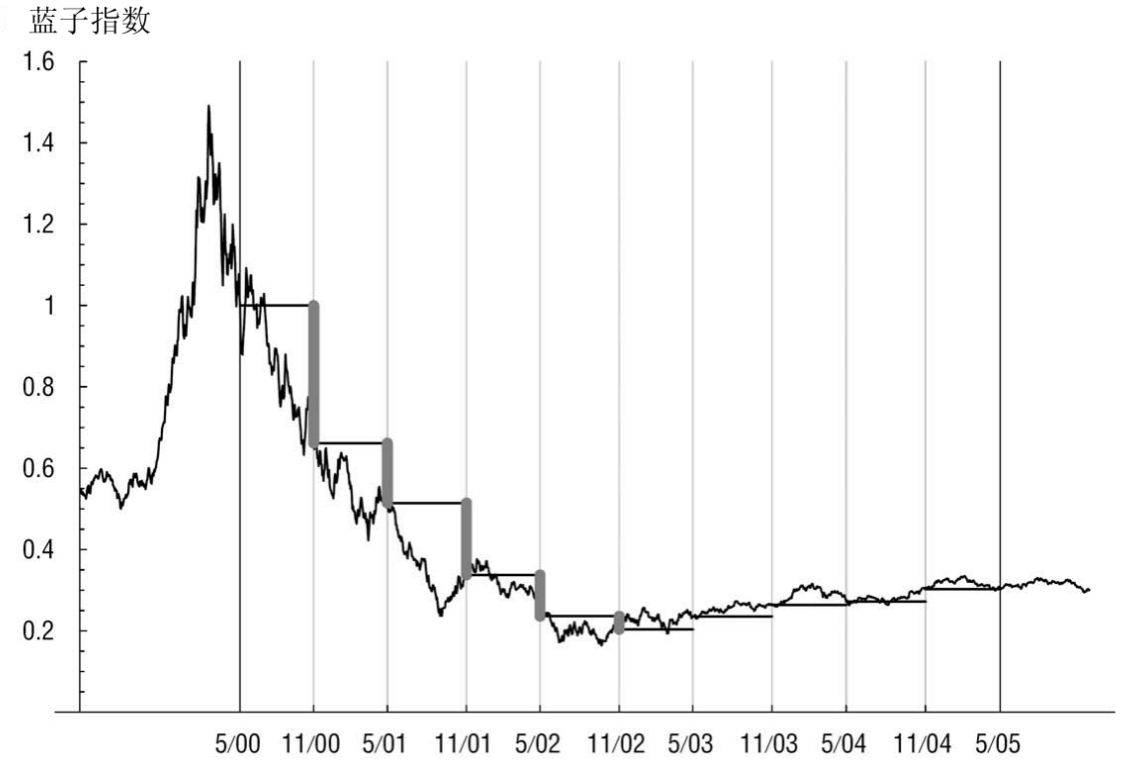


图10.4 合约“Mediobanca 2000-2005 Reverse Cliquet Telecommunicazioni”反转凯利的历史表现。垂直的虚线代表重置日期，水平的实线代表固定的点位，垂直的柱状图代表对该凯利期权的收益结构产生负面影响的部分

虽然到期时产品仅支付了本金，但是远比持有标的一揽子电信行业股票要好很多。此外，相比于我们之前检验的、有上限和下限的凯利期权，该结构有很多优势。以下供大家参考：2000年5月18日的五年期欧元区年化互换利率为5.73%。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

10.3 拿破仑

合约“Mediobanca 2002-2005 World Indices Euro Note Serie46”（ISIN IT0003487524）在到期日保证本金赎回，并支付年化息票：

$$coupon_i = \max\left[0, MaxCoupon + \tilde{r}_i\right]$$

其中，$\tilde{r}_i$是标普500指数、欧洲斯托克斯50指数和日经225指数表现最差的月份收益的平均值，MaxCoupon=10%。特别地，

$$\tilde{r}_i := \inf_{t_{i-1} < t_j < t_i} r_j$$

每个凯利期权都对执行价格重置日的波动率曲线有很强的依赖性，所以整个结构对远期波动率曲线的依赖性极大。波动率曲线的负倾斜越大，看跌期权的值越大，反映出较强的下行预期，也使得该结构的价值变低。之前的经验让我们预期，拿破仑在随机波动率模型下（更大的平均负收益水平）的价格会比局部波动率模型下的价格低很多。

Heston模型和局部波动率模型下的定价

图 10.5 展示了全年收益上限MaxCoupon不同的情况下，Heston模型下（采用第4章中的Heston-Nandi参数）和局部波动率模型下，拿破仑的风险中性期望息票。与从前一样，我们假设利率和分红率为零。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

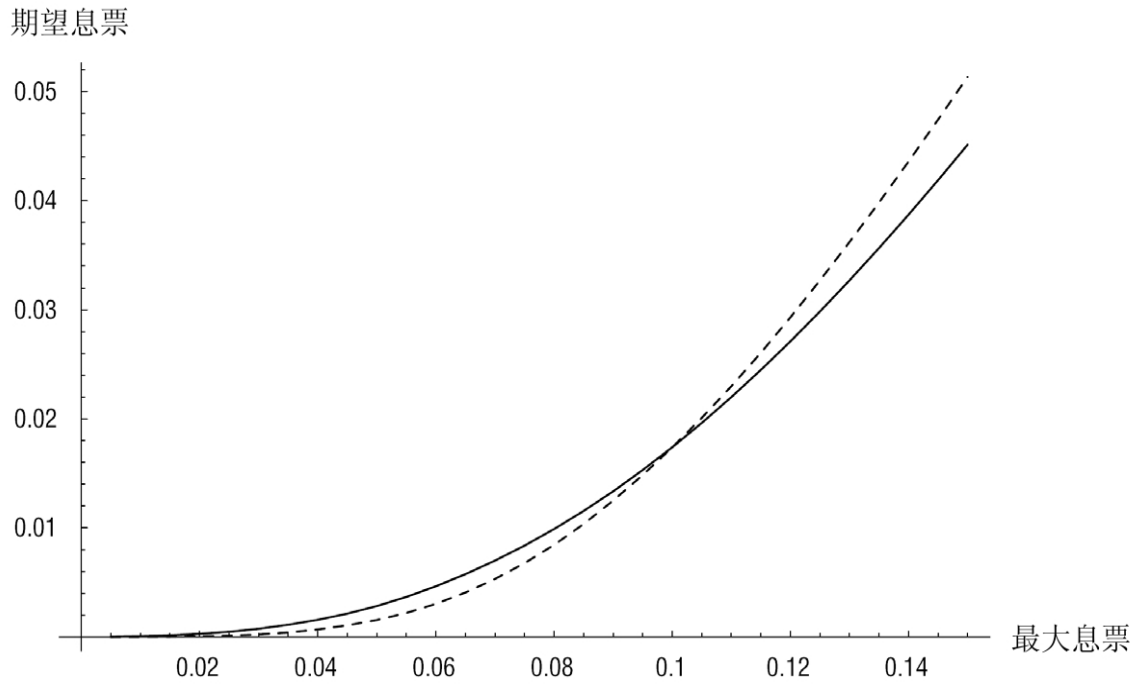


图10.5 拿破仑息票的期望值（风险中性）关于最大息票的函数。实线代表随机波动率的情况，虚线代表局部波动率的情况

这次，我们的直觉失败了！全年收益上限MaxCoupon不同的情况下，拿破仑在随机波动率模型下的价格可能比局部波动率模型下的价格高，也可能比局部波动率模型下的价格低。此例中的合约条款规定MaxCoupon=10%，这时拿破仑在随机波动率和局部波动率模型下的期望息票相等：都为1.74%。

波动率曲率很大时，拿破仑的期望息票在波动率高时较低，在波动率低时较高。相比于随机波动率模型，波动率曲率在局部波动率模型下是被低估的；对于此例而言，波动率曲率的低估占主导作用。拿破仑结构的另一个特点是，标的资产价格下降时，期望息票下降、Vega下降——如果当前的负收益程度很高，息票下限很快就要被触碰了，未来的波动率对价格几乎没有影响。相比于局部波动率模型，在随机波动率模型下，这种价差影响可能被高估了。

这个故事的寓意是很清楚的：如果产品结构是我们熟悉的、且被很好地理解了，直觉是有效的。但是如果产品结构我们不熟悉或者没有被很好地理解，我们应该考虑产品定价对模型假设的敏感性。仅仅计算模型对参数的敏感性是不够的，模型假设本身也是需要被强调的。

产品表现

图10.6画出了该拿破仑债券的成分指数——欧元区斯托克50指数——的历史表现示意图。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

图10.6 斯托克斯50指数成分为标的的“Mediobanca 2002-2005 World Indices Euro Note Serie 46”拿破仑合约的历史表现。浅色的垂直线代表重置日期，深色的垂直竖线代表息票设定日期，水平的实线代表固定的点位，灰色的粗柱状图代表每个息票期的最小月回报

我们发现该债券的估计息票与无风险利率非常接近，发行日（2002 年 12 月20日）的3年欧元区年化互换利率为3.26%，参见表10.2。虽然拿破仑结构看起来可以给投资者提供非常高的息票，想要成分指数在产品存续期的每个月内都不出现大的跌幅，投资者也要足够幸运才行。另一方面，所有这些结构都是保本的，这些看似复杂的凯利期权对投资者来说是比较保守的投资。

表10.2 表现最差的月份的收益和估计的拿破仑息票。注意，息票是三个标的资产表现最差月份的收益的平均值加上10%得到的

日期	$\tilde{r}_{STOXX50}$	$\tilde{r}_{SPX}$	$\tilde{r}_{NIKKEI225}$	Est. Coupon
12/20/2003	−7.61%	−5.69%	−11.61%	1.70%
12/20/2004	−6.62%	−4.26%	−9.12%	3.33%
12/20/2005	−3.09%	−3.91%	−6.36%	5.55%

投资者动机

读者可能会好奇，投资者考虑投资这些奇异凯利结构的动机是什么。无论是过去还是现在，凯利结构的目标客户都是那些习惯于投资高收益政府债券的欧洲个人投资者。当然，随着欧元的问世和全球收

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

益率的下降，高收益政府债券不再真的是高收益了。这些保守的保本结构为投资者提供了类似高收益债券的投资标的。虽然从定价和对冲的角度讲，这些产品结构是复杂的，但是，向投资者解释起来并不复杂。

关于拿破仑的更多内容

虽然，凯利结构债券对投资者来说是保守型投资产品，对这些产品的提供方（最终提供对冲的人）来说却是很难管理的。对于局部封顶、全局封底的凯利和反向凯利而言，对冲者至少要大致了解，这些结构等价于哪些一揽子远期开始的期权。至于拿破仑结构，连拆解成传统期权的组合都是做不到的。

实际上，拿破仑结构流行的时候（2002到2003年），奇异期权交易员就已经聪明地意识到局部波动率模型是不合理的了，因为远期波动率曲线过于平坦。然后，最普遍的定价模型却不是随机波动率模型，而是一种叫做“独立增量技术”（Independent Increment Technique）的方法。为了避免套利，各种收益必须是不相关的，这个技术假设收益之间是相互独立的——甚至是平方收益。远期波动率倾斜大致是正确的，因为一个月的收益率是从一个月期的风险中性分布中得出的（以蒙特卡洛模拟为例）。然而，远期波动率水平是确定的，波动率曲率是低估的。

所以，在独立增量技术下拿破仑的价格是严重低估的，因为价格越低越容易做成生意，那些使用了错误模型的交易员反而得到更多业务。讽刺的是，如果奇异期权交易员使用局部波动率模型定价，他们就不会输那么多钱。探究不同模型假设的重要性再怎么强调都不过分。过分地相信直觉总是会犯错的！

在《风险》杂志（Risk）2004年2月刊登的一篇文章中，Jeffery（2004）介绍了当时的情况，让大家感受一下作为奇异期权交易员可能遇到的某些痛苦经历。

---

[1]这两组模型假设生成的欧式期权价格几乎相等。

[2]注意，这些都只是估计值。计算这些数值的机构永远有最终解释权。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

第11章 波动率衍生品

在最后一章中，我们将讨论用已实现波动率或方差（二次变差）作为标的资产的衍生品的定价和对冲问题。虽然人们可能认为，这些最近开发出的衍生工具在所有奇异衍生品中是最难定价和对冲的，结果却是，在某些方面这些工具却是最安全、最容易的。在本章中，我们会给出一些优雅且稳健的构建方法。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

11.1 一般的欧式收益结构概览

与往常一样，我们假设所有执行价和到期日对应的欧式期权都是有交易的。根据Carr和Madan（1998）的思路，我们会证明，所有到期日为T、收益结构是二阶可导的衍生品，都可以被一揽子到期日为T的欧式期权静态对冲。

根据Breeden和Litzenberger（1978）的思路，我们可以将T时刻的股价S_T的分布写成：

$$p(S_T,T;S_t,t) = \left.\frac{\partial^2 \tilde{C}(S_t,K,t,T)}{\partial K^2}\right|_{K=S_T} = \left.\frac{\partial^2 \tilde{P}(S_t,K,t,T)}{\partial K^2}\right|_{K=S_T}$$

其中，$\tilde{C}$和$\tilde{P}$分别代表未贴现的看涨和看跌期权价格。

这样，到期日为T、收益结构为一般化收益结构的合约价值为：

$$\mathbb{E}\left[g(S_T)\,|\,S_t\right]=\int_0^\infty dK p(K,T;S_t,t)g(K)$$

$$=\int_0^F dK\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial K^2}g(K)+\int_F^\infty dK\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial K^2}g(K)$$

其中，F代表股价在T时刻的远期价格。进行两次分布积分，并运用看涨看跌期权平价公式$\tilde{C}(K)-\tilde{P}(K)=F-K$，结果如下：

$$\mathbb{E}\left[g(S_T)\,|\,S_t\right]=\left.\frac{\partial \tilde{P}}{\partial K}g(K)\right|_0^F-\int_0^F dK\frac{\partial \tilde{P}}{\partial K}g'(K)+\left.\frac{\partial \tilde{C}}{\partial K}g(K)\right|_F^\infty$$

$$-\int_F^\infty dK\frac{\partial \tilde{C}}{\partial K}g'(K)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$
\begin{aligned}
&= g(F) - \int_0^F dK \frac{\partial \tilde{P}}{\partial K} g'(K) - \int_F^\infty dK \frac{\partial \tilde{C}}{\partial K} g'(K) \\
&= g(F) - \tilde{P}(K) g'(K)\Big|_0^F + \int_0^F dK \tilde{P}(K) g''(K) \\
&\quad - \tilde{C}(K) g'(K)\Big|_F^\infty + \int_F^\infty dK \tilde{C}(K) g''(K) \\
&= g(F) + \int_0^F dK \tilde{P}(K) g''(K) + \int_F^\infty dK \tilde{C}(K) g''(K)
\end{aligned}
\qquad (11.1)
$$

通过令公式（11.1）中的t→T，我们发现，收益结构为二次可导的欧式期权可以被一揽子欧式期权复制：这些期权的执行价从0到∞不等；每个期权的权重等于收益方程在期权执行价处的二阶导数。这一对冲是静态对冲，因为每只期权的权重是取决于它本身的执行价格和到期日收益结构，并不取决于时间或者股票价格水平。还有一点需要注意的是，公式（11.1）完全是模型独立的。

例子：欧式期权

利用狄拉克函数（Dirac Delta Functions），我们可以将之前的结论扩展到非二阶可导的收益结构上。例如，考虑收益结构为$(S_T - L)^+$的看涨期权的对冲组合。此时，$g''(K) = \delta(K-L)$，由公式（11.1）得：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(S_T - L)^+\right] &= (F-L)^+ + \int_0^F dK \tilde{P}(K)\delta(K-L) \\
&\quad + \int_F^\infty dK \tilde{C}(K)\delta(K-L) \\
&= \begin{cases} (F-L) + \tilde{P}(L) & \text{当 } L < F \text{时} \\ \tilde{C}(L) & \text{当 } L \geqslant F \text{时} \end{cases} \\
&= \tilde{C}(L)
\end{aligned}
$$

最后一步是由期权平价公式得到的。换句话说，欧式期权的对冲组合就是其本身。

例子：摊销期权

标准欧式期权收益结构的一个有用的变换是摊销期权（Amortizing Options），对于执行价为L的摊销期权，其收益结构为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$g(S_T) = \frac{(S_T - L)^+}{S_T}$$

当标的股票波动率较高、标准欧式期权的价格令人望而却步时，该期权结构非常吸引人。对于期权进入实值状态时名义金额下降的期权，这个收益结构是有效的。该收益结构的二阶导数为：

$$g''(K) = \left\{ -\frac{2L}{S_T^3}\theta(S_T - L) + \frac{\delta(S_T - L)}{S_T} \right\}\Bigg|_{S_T=K}$$

不失一般性（为了简便起见），假设L>F。将上式代入公式（11.1）得：

$$\mathbb{E}\left[\frac{(S_T - L)^+}{S_T}\right] = \int_F^\infty dK\tilde{C}(K)g''(K)$$

$$= \frac{\tilde{C}(L)}{L} - 2L\int_L^\infty \frac{dK}{K^3}\tilde{C}(K)$$

由此可见，执行价为L的摊销看涨期权等价于执行价为L的欧式看涨期权减去执行价从L到∞的一揽子欧式看涨期权。

对数合约

现在考虑T时刻收益为log（S_T /F）的合约。此时，$g''(K) = -1/S_T^2\big|_{S_T=K}$，由公式（11.2）得：

$$\mathbb{E}\left[\log\left(\frac{S_T}{F}\right)\right] = -\int_0^F \frac{dK}{K^2}\tilde{P}(K) - \int_F^\infty \frac{dK}{K^2}\tilde{C}(K)$$

令k：=log（K/F），重写这个式子，我们得到了下面有前瞻性的式子：

$$\mathbb{E}\left[\log\left(\frac{S_T}{F}\right)\right] = -\int_{-\infty}^0 dkp(k) - \int_0^\infty dkc(k) \qquad (11.2)$$

其中，

$$c(y) := \frac{\tilde{C}(Fe^y)}{Fe^y}; \quad p(y) := \frac{\tilde{P}(Fe^y)}{Fe^y}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

代表期权价格占执行价的比例。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

11.2 方差和波动率互换

我们依然假设利率和分红率为零。此时，F=S_0，按路径应用伊藤引理得：

$$\log\left(\frac{S_T}{F}\right)=\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$$
$$=\int_0^T \mathrm{d}\log(S_t) \qquad (11.3)$$
$$=\int_0^T \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}-\int_0^T \frac{{\sigma_{S_t}}^2}{2}\mathrm{d}t$$

等式（11.3）右边的第二项刚好是{0，T}期间整齐方差（或二次变差）$W_T := \langle x \rangle_T$的一半。等式右边的第一项代表了为使股票的美元价值保持为一个常数而采取的对冲策略的收益（如果股票价格上涨，买入股票；如果股票价格下跌，卖出股票）。前文得到一个结论，对数收益结构的期权可以用一揽子欧式期权对冲。结合该结论可知，只要股价过程是一个分散过程，整体方差W_T就可以被一揽子期权完全复制，该复制组合是模型独立的。特别地，无论波动率是随机的还是确定的，公式（11.3）都适用。

现在，求公式（11.3）的风险中性期望，并与公式（11.2）比较，我们得到：

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \sigma_{S_t}^2 dt\right]=-2\mathbb{E}\left[\log\left(\frac{S_T}{F}\right)\right]$$
$$=2\left\{\int_{-\infty}^0 dkp(k)+\int_0^\infty dkc(k)\right\} \qquad (11.4)$$

我们可以明显地发现，正如Dupire（1992）和Derman、Kamal、Kani、Zhou（1996）指出的那样，只要标的资产价格过程是分散的，整体方差的公允价值可以由无数只欧式期权的组合给出，该结论是模型独立的，即在任何模型下都成立。

方差互换

虽然，方差和波动率互换的交易是 20 世纪 90 年代才开始的，Morokoff （1999）和 Demeterfi、Derman、Kamal、Zou（1999）就给

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

出了这些合约的描述和对冲实务。

事实上，方差互换并不是真的互换，而是关于已实现波动率的远期合约。在T时刻的收益结构为：

$$N \times A \times \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \log\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) \right\}^2 - \left\{ \frac{1}{N} \log\left(\frac{S_N}{S_0} \right) \right\}^2 \right\} - N \times K_{var}$$

其中，N是互换的名义本金，A是年化影响因子，K_{var}是执行价。实际操作中年化方差不一定是均值调整的，所以相应的漂移项不一定出现在上面的公式中。

从理论角度讲，方差互换的精妙之处在于，假设股票价格服从分散过程的情况下，方差互换可以被完美复制。从实践角度讲，市场参与者可以在避免 Delta对冲的情况下通过波动率互换表达对波动率的观点。

1998 年，在美国长期资本管理公司（LTCM）倒闭之后，股票指数波动率上升到没有预期到的高水平，方差互换产品在那样的历史背景下发行。对冲基金通过交易方差互换获利（在水平较高时卖出已实现波动率）。他们购买方差互换而非卖出期权的原因是，方差互换纯粹是关于已实现波动率的交易，不需要费力气去做Delta对冲，也不涉及其他的路径依赖过程。交易商愿意在高位买入Vega，因为他们可以通过向散户卖出权益挂钩的保本投资品来卖空Vega，但是这样的组合会让他们在波动率水平较高时损失惨重。

Heston模型下的方差互换

在Heston模型下，瞬时方差 v 服从以下过程：

$$\mathrm{d}v(t) = -\lambda(v_t - \bar{v})\mathrm{d}t + \eta\sqrt{v_t}\mathrm{d}Z$$

由此可以得到整体方差W_T的期望：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_T] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T v_t \mathrm{d}t \right] \\ &= \int_0^T \hat{v}_t \mathrm{d}t \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda T}}{\lambda}(v - \bar{v}) + \bar{v}T \end{aligned}$$

年化的期望方差由下式给出：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\frac{1}{T}\mathbb{E}[W_T] = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda T}(v-\bar{v}) + \bar{v}$$

由上式可见，Heston 模型下的期望方差只取决于 v 、 v 和 λ，而不取决于波动率的波动率 η 。因为方差互换的价格只取决于欧式期权的价格，其价格是不依赖于动态过程的假设的（例如，局部波动率和随机波动率）。

对波动率倾斜和波动率曲率的依赖性

在Heston模型下，在值远期期权的隐含波动率要比期望方差的平方根小（想一下 Heston 模型下）。实践中，我们从一揽子给定到期日的欧式期权开始，试图弄清楚方差互换是怎么与在值远期波动率、波动率倾斜和波动率曲率联系的。

关于方差的公允价值有一个漂亮的公式，定义

$$z(k) = d_2 = -\frac{k}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

直观上讲，z用隐含标准差度量了期权的对数价值状态。然后，

$$\mathbb{E}[W_T] = \int_{-\infty}^{\infty} dz N'(z)\sigma_{BS}^2(z)T \qquad (11.5)$$

当波动率倾斜不存在时，这个式子显然是正确的。为了证明该式的合理性，下面给出证明过程。

证明公式（11.5） [1]

与平常一样，未贴现的欧式期权价格由下式给出：

$$C = F\left\{N\left(-\frac{k}{\sqrt{w}} + \frac{\sqrt{w}}{2}\right) - e^k N\left(-\frac{k}{\sqrt{w}} - \frac{\sqrt{w}}{2}\right)\right\}$$

其中，k：=log（K/F）是对数执行价。

对上式求关于K的导数，我们得到：

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{1}{K}\frac{\partial C}{\partial k} = -N\left(-\frac{k}{\sqrt{w}} - \frac{\sqrt{w}}{2}\right) + N'\left(-\frac{k}{\sqrt{w}} - \frac{\sqrt{w}}{2}\right)\frac{\partial\sqrt{w}}{\partial k}$$

记

$$d_1 = -\frac{k}{\sqrt{w}} + \frac{\sqrt{w}}{2};\ d_2 = -\frac{k}{\sqrt{w}} - \frac{\sqrt{w}}{2}$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

再次求关于K的导数，我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} &= \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial k}\left\{-N\left(-\frac{k}{\sqrt{w}}-\frac{\sqrt{w}}{2}\right)+N'\left(-\frac{k}{\sqrt{w}}-\frac{\sqrt{w}}{2}\right)\frac{\partial\sqrt{w}}{\partial k}\right\}\\ &= \frac{N'(d_2)}{K}\left\{-\frac{\partial d_2}{\partial k}\left(1+d_2\frac{\partial\sqrt{w}}{\partial k}\right)+\frac{\partial^2\sqrt{w}}{\partial k^2}\right\}\\ &= \frac{N'(d_2)}{K}\left\{\frac{1}{\sqrt{w}}\left(d_1 d_2\left(\frac{\partial\sqrt{w}}{\partial k}\right)^2-\frac{2k}{\sqrt{w}}\frac{\partial\sqrt{w}}{\partial k}+1\right)+\frac{\partial^2\sqrt{w}}{\partial k^2}\right\}\end{aligned}$$

与之前讨论的一样，在分散过程假设下，可以通过计算在T时刻收益结构为2 log（S_T /F）的期权估计方差互换的公允价值。用暴力计算的方法得到：

$$\begin{aligned}2\mathbb{E}\left[\log\frac{S_T}{F}\right] &= 2\int_0^\infty dK\log\left(\frac{K}{F}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}\\ &= 2\int_{-\infty}^\infty dk\,k\,N'(d_2)\left\{-\frac{\partial d_2}{\partial k}\left(1+d_2\frac{\partial\sqrt{w}}{\partial k}\right)+\frac{\partial^2\sqrt{w}}{\partial k^2}\right\}\\ &= 2\int_{-\infty}^\infty dk\,N'(d_2)\left\{-k\frac{\partial d_2}{\partial k}-\frac{\partial\sqrt{w}}{\partial k}\right\}\\ &= \int_{-\infty}^\infty dk\,N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial k}w\end{aligned}$$

从而得到了公式（11.5）。

现在考虑用一种简单的参数化形式表示BS隐含方差：

$$\sigma_{BS}^2(z) = \sigma_0^2 + \alpha z + \beta z^2$$

将上式代入公式（11.5），得到：

$$\mathbb{E}[W_T] = \sigma_0^2 T + \beta T$$

在这个式子中，波动率曲线的倾斜没有贡献，只有波动率曲线的曲率有贡献。这个式子让我们觉得增加波动率曲线的倾斜程度不会改变波动率的平均水平，但是提高波动率曲线的曲率β提高了公式（11.2）中看涨期权和看跌期权的价格，从而提高了方差的公允价值。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

跳的影响

用x_t表示复合泊松过程的收益，则

$$x_T = \sum_i^{N_T} y_i$$

其中，y_i是独立同分布的，N_T是均值为λT的泊松过程。定义二次变差

$$\langle x \rangle_T = \sum_i^{N_T} |y_i|^2$$

则

$$\mathbb{E}\left[\langle x \rangle_T\right] = \mathbb{E}\left[N_T\right]\mathbb{E}\left[|y_i|^2\right] = \lambda T \int_0^\infty y^2 \mu(y)\, \mathrm{d}y$$

即

$$\mathbb{E}\left[x_T\right] = \lambda T \int_0^\infty y \mu(y)\, \mathrm{d}y$$

且

$$\mathbb{E}\left[{x_T}^2\right] = \lambda T \int_0^\infty y^2 \mu(y)\, \mathrm{d}y + (\lambda T)^2 \left(\int_0^\infty y \mu(y) \mathrm{d}y\right)^2$$

所以，

$$\mathbb{E}\left[\langle x \rangle_T\right] = \mathbb{E}\left[{x_T}^2\right] - \mathbb{E}\left[x_T\right]^2 = \mathrm{Var}\left[x_T\right]$$

这意味着对于复合泊松过程来说，二次变差的期望就是到期收益对应的分布的方差。我们知道，在Black-Scholes模型的常数波动率假设下，这个结论是成立的，但是对于一般情况这个结论明显是不成立的（例如，Heston模型）。

利用公式（11.1），我们可以用一系列欧式期权表示到期日分布的两个矩函数：

$$\mathbb{E}\left[x_T\right] = \mathbb{E}\left[\log(S_T / F)\right] = -\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}k\ p(k) - \int_0^\infty \mathrm{d}k\ c(k)$$

$$\mathbb{E}\left[{x_T}^2\right] = \mathbb{E}\left[\log^2(S_T / F)\right] = -\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}k 2kp(k) - \int_0^\infty \mathrm{d}k 2kc(k)$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

所以，对于复合泊松过程，如果我们知道欧式期权的价格，可以通过计算到期日分布的方差计算二次变差（即，计算方差互换的价值）。

另一方面，如果标的资产过程是分散过程，我们可以利用公式（11.4）计算二次变差的期望，表示如下：

$$\mathbb{E}\left[\langle x\rangle_T\right] = -2\mathbb{E}\left[x_T\right] = 2\left\{\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}k\ p(k) + \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}k\ c(k)\right\}$$

所以，如果标的资产价格过程是复合泊松过程，我们有一种方法可以计算 $\mathbb{E}[\langle x\rangle_T]$，如果标的资产价格过程符合分散过程，我们用另一种方法计算 $\mathbb{E}[\langle x\rangle_T]$。实际中，我们不清楚标的资产到底符合什么过程，所以要弄清楚两种计算方法得到的结果差别有多大。

为了计算这个差距，我们首先定义特征函数

$$\mathbb{E}\left[\log\left(S_T/F\right)\right] = -i\ \frac{\partial}{\partial u}\phi_T(u)\bigg|_{u=0}$$

注意到，如果跳与连续过程是独立的，像 Merton 模型和 SVJ 模型假设的那样，特征函数可以写成连续部分对应的特征函数和跳对应的特征函数的乘积：

$$\phi_T(u) = \phi_T^C(u)\,\phi_T^J(u)$$

其中，大写的C和J分别代表连续和跳部分。由第5章的L′evy-Khintchine表示可以得到：

$$-i\frac{\partial}{\partial u}\phi_T^J(u)\big|_{u=0} = \lambda T\int_0^T (1+y-\mathrm{e}^y)\mu(y)\mathrm{d}y$$

另一方面，我们在前文已经得到：

$$\mathbb{E}\left[\left\langle x^J\right\rangle_T\right] = \lambda T\int_0^T y^2\mu(y)\mathrm{d}y$$

从而，方差互换的价值与一揽子期权的差别为：

$$\mathbb{E}\left[\langle x\rangle_T\right] + 2\mathbb{E}\left[x_T\right] = 2\lambda T\int_0^T \left(1+y+y^2/2-\mathrm{e}^y\right)\mu(y)\mathrm{d}y$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

注意到，e^y泰勒展开后的前三项为$1+y+y^2/2$，我们的结论是，通过公式（11.1）计算出的方差互换的价值，误差的级别与跳的幅度相关。如果跳不存在，用一揽子期权表示的方差互换价值是完全正确的。

例：均值为α、标准差为δ且服从对数正态分布的跳

在此情况下，

$$\mathbb{E}[\langle x\rangle_T] + 2\,\mathbb{E}[x_T] = \lambda T\left(\alpha^2+\delta^2\right) + 2\lambda T\left(1+\alpha-e^{\alpha+\delta^2/2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lambda T\alpha\left(\alpha^2+3\delta^2\right) + \text{高阶项}$$

令α=-0.09、δ=0.14、λ=0.61，参考Bakshi、Cao、Chen（1997），一年期方差互换的误差仅为0.00122427，当波动率为20%时，百分比误差仅为0.30%。

波动率互换

已实现波动率Σ_T是已实现方差$V_T := \langle x\rangle_T / T$的平方根，对于一个随机变量而言，平方根的期望小于等于期望的平方根。$\sqrt{V_T}$与Σ_T之间的差别被称为凸性调整。

图11.1给出了方差互换与波动率互换的收益的比较。

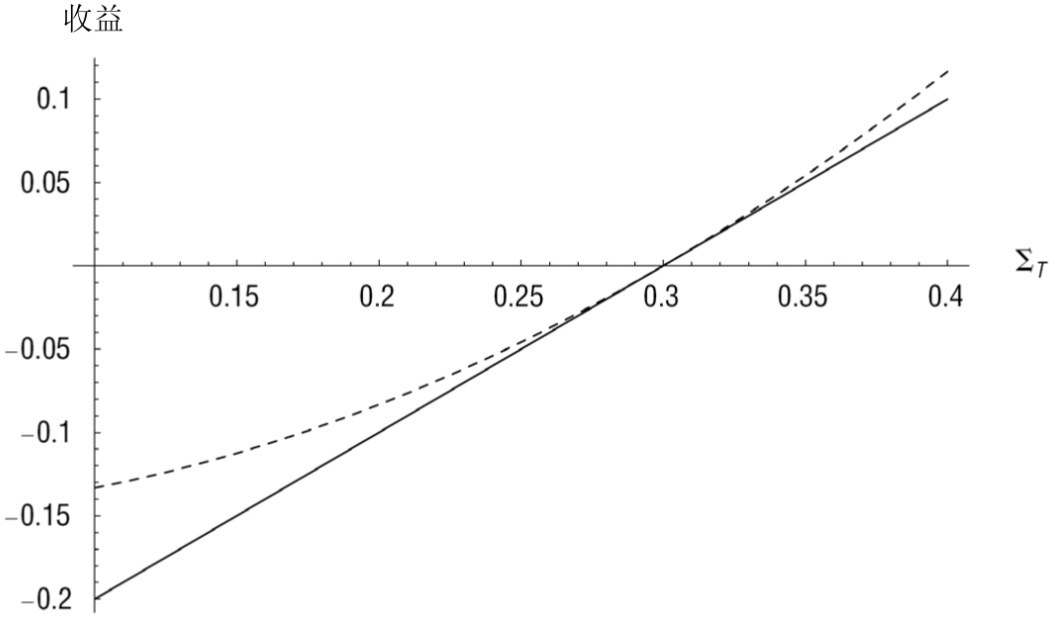


图11.1 方差互换的收益（虚线）和波动率互换的收益（实线）关于以实现波动率Σ_T的函数。两个互换的执行价对应的波动率都为30%

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

直观上讲，凸性调整的数量级应该与以实现波动率的波动率有关。已实现波动率存在波动，未必要求波动率是随机的；即使是在局部波动率模型下，已实现波动率Σ_T也会随着股价路径的变化而波动。

一般情况下，波动率互换是没有复制组合的，而且凸性调整也是模型依赖的。下面，我们将在Heston模型下计算凸性调整。

Heston模型下的凸性调整

为了继续推导，我们使用下面的式子：

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{W_T}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1-\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\psi W_T}]}{\psi^{3/2}}\mathrm{d}\psi \qquad (11.6)$$

我们知道：

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\psi W_T}]=\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\psi\int_0^T \nu_t \mathrm{d}t\right\}\right]$$

与CIR模型下债券价格的表达式是一致的。在Cox、Ingersoll、Ross（1985）的文章中，我们可以找到整体方差$W_T=\int_0^T \nu_t \mathrm{d}t$的拉普拉斯变换：

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\psi W_T}\right]=A\,\mathrm{e}^{-\psi v B}$$

其中，

$$A=\left\{\frac{2\phi\,\mathrm{e}^{(\phi+\lambda)T/2}}{(\phi+\lambda)(\mathrm{e}^{\phi T}-1)+2\phi}\right\}^{2\lambda\bar{v}/\eta^2}$$

$$B=\frac{2\,(\mathrm{e}^{\phi T}-1)}{(\phi+\lambda)(\mathrm{e}^{\phi T}-1)+2\phi}$$

其中，$\phi=\sqrt{\lambda^2+2\psi\eta^2}$。

经过一些乏味的代数运算，我们可以证明：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\mathbb{E}[W_T] = -\frac{\partial}{\partial \psi}\mathbb{E}\left[e^{-\psi W_T}\right]\Big|_{\psi=0}$$
$$= \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda}(v-\bar{v}) + \bar{v}T$$

与我们之前直接对Heston模型的随机微分方程积分的结果一样。

采用第4章中Heston-Nandi参数（ν=0.04，$\bar{\nu}=0.04$，λ=10.0，η=1.0）的情况下，我们对公式（11.6）进行数值积分，从而得到凸性调整关于剩余到期日的函数，见图11.2。

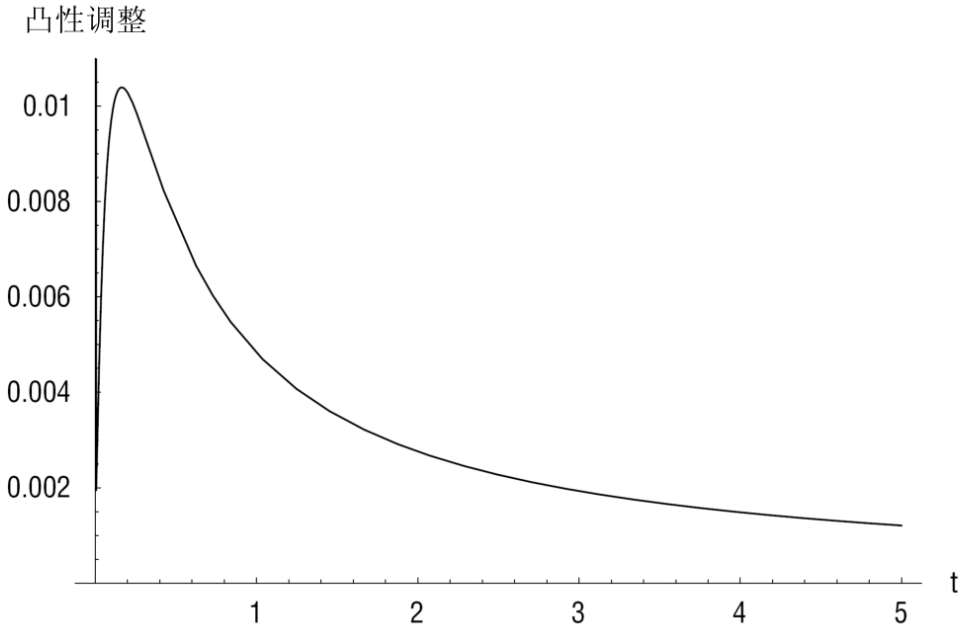


图11.2 在采用Heston-Nandi参数的情况下，Heston模型的年化凸性调整关于剩余到期日的函数

采用 Bakshi、Cao、Chen 参数（ν=0.04， ν=0.04， λ=1.15，η=0.39）的情况下，我们得到了另一个凸性调整关于剩余到期日的函数，见图11.3。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

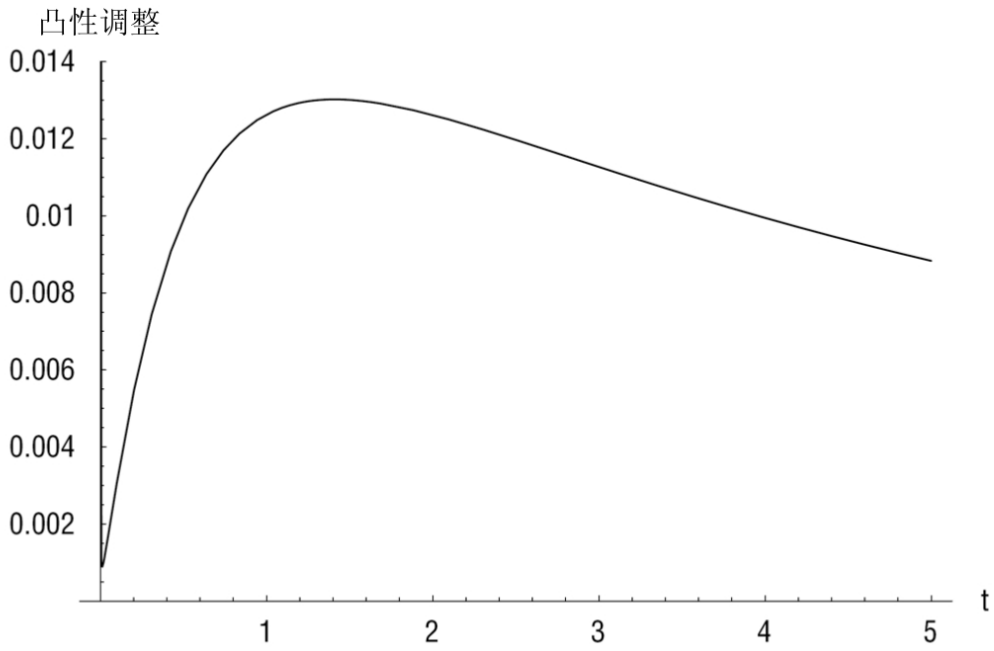


图11.3 在采用Bakshi、Cao、Chen参数的情况下，Heston模型的年化凸性调整关于剩余到期日的函数

如果想从直观上了解现在正在讨论的问题，计算T→∞、$\nu=\bar{\nu}$时方差V_T的极限：

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[W_T] &= \mathbb{E}\left[{W_T}^2\right] - \{\mathbb{E}[W_T]\}^2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\psi W_T}\right]\Big|_{\psi=0} - \left\{\frac{\partial}{\partial\psi}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\psi W_T}\right]\Big|_{\psi=0}\right\} \\ &= \bar{v}T\frac{\eta^2}{\lambda^2} + O(T^0)\end{aligned}$$

所以，当T→∞时，年化方差的标准差主要由$\sqrt{\bar{\nu}/T}\eta/\lambda$表示。在合约存续期，凸性调整应该与年化波动率的标准差在同一个数量级上。根据之前的结论，我们认为这一数量级应为η/λ。对比Heston-Nandi参数下和Bakshi、Cao、Chen（BCC）参数下得到的凸性调整，BCC参数下的凸性调整大概是另外一组参数的3.39倍，从图中可以看出。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

11.3 波动率衍生品定价

假设标的资产价格过程是分散过程，且标的资产价格过程与波动率过程之间的相关性为零。在这一假设下，Carr 和 Lee（2005）证明了，对任何收益结构为二次变差 $\langle x \rangle_T$ 的函数的波动率衍生品，它们的价格都可以被到期日为T的欧式期权表示。Friz和Gatheral（2005）给出了一种实用的算法来计算这一公式。我们在下文中给出推理过程。

幂收益结构的公允价值

回想公式（11.1），一般的收益结构可以扩展成下述形式：

$$\mathbb{E}\left[g(S_T)\right] = g(F) + \int_0^F \mathrm{d}K\tilde{P}(K,T)g''(K) + \int_F^\infty \mathrm{d}K\tilde{C}(K,T)g''(K) \tag{11.7}$$

其中，$\tilde{C}$ 和 $\tilde{P}$ 代表未贴现的看涨和看跌期权价格，F代表股票价格的T时刻远期价格。将 $g(S_T) = S_T^p$ 代入上式，我们得到幂收益结构的复制投资组合：

$$\mathbb{E}\left[S_T^p\right] = F^p + p(p-1)\int_0^F \mathrm{d}K\tilde{P}(K,T)K^{p-2} + p(p-1)\int_F^\infty \mathrm{d}K\tilde{C}(K,T)K^{p-2}$$

定义对数执行价k：=log（K/F）。然后有：

$$\mathbb{E}\left[S_T^p\right] = F^p\left\{1 + p(p-1)\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}k\hat{p}(k)\mathrm{e}^{pk} + p(p-1)\int_0^\infty \mathrm{d}k\hat{c}(k)\mathrm{e}^{pk}\right\} \tag{11.8}$$

其中，pˆ（k）和cˆ（k）分别代表看涨看跌期权价格占执行价的比例。

如果标的资产过程和波动率过程的相关性为零，看涨看跌期权平价公式成立，所以，$\hat{p}(k) = \mathrm{e}^{-k}\hat{c}(-k)$。我们可以重写公式（11.8），得到：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\mathbb{E}\left[S_T^p\right]=F^p\left\{1+2p(p-1)\int_0^\infty \mathrm{d}k\mathrm{e}^{k/2}\hat{c}(k)\cosh(p-1/2)k\right\}$$

零相关性下二次变差的拉普拉斯变换

在假设标的资产价格服从分散过程、且与波动率过程零相关的情况下，Carr和Lee（2005）利用幂收益结构公允价值的公式（11.8）推导出了二次变差 $W_T:=\langle x\rangle_T$ 的拉普拉斯变换。因为我们知道幂收益结构的复制组合，所以可以顺理成章地得到二次变差的复制组合。

根据Carr和Lee，我们注意到，假设零相关性时，在特殊的已实现波动率过程（波动率路径）的情况下，对数股票价格为：

$$x_T=\int_0^T\sigma_t\mathrm{d}W_t-\frac{1}{2}\langle x\rangle_T$$

这是均值为 $-\langle x\rangle_T/2$、方差为 $\langle x\rangle_T$ 的正态分布。所以有：

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{p\,x_T}\right]=\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{(p^2/2-p/2)\langle x\rangle_T}\right]=:\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda\langle x\rangle_T}\right]$$

其中，$\lambda=p^2/2-p/2$。对此求逆，得到矩母函数：

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda\langle x\rangle_T}\right]=\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{p(\lambda)x_T}\right]$$

其中，$p(\lambda)=1/2\pm\sqrt{1/4+2\lambda}$。

由公式（11.8），我们可知：

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda\langle x\rangle_T}\right]=1+p(\lambda)\big(p(\lambda)-1\big)\left\{\int_{-\infty}^0\mathrm{d}k\hat{p}(k)\mathrm{e}^{p(\lambda)k}+\int_0^\infty\mathrm{d}k\hat{c}(k)\mathrm{e}^{p(\lambda)k}\right\}\qquad(11.9)$$

或者，

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda\langle x\rangle_T}\right]=1+2\,p(\lambda)\,(p(\lambda)-1)\int_0^\infty\mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{k/2}\,\hat{c}(k)\,\cosh\left(p(\lambda)-1/2\right)k$$

注意到，p（λ）（p（λ）-1）=2λ，我们可以进一步得到：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda\langle x\rangle_T}\right]=1+4\lambda\int_0^\infty \mathrm{d}k\mathrm{e}^{k/2}\hat{c}(k)\cosh\left(p(\lambda)-1/2\right)k \qquad (11.10)$$

由公式（11.10），我们可以得到指数二次变差（已实现波动率）收益结构的公允价值。通过求导，任何二次变差的正整数幂的公允价值都可以得到。为了检验，我们考虑二次变差的一次幂——期望整体方差，得到：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle x\rangle_T\right]&=\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda\langle x\rangle_T}\right]\Big|_{\lambda=0}\\
&=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{1+4\lambda\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \mathrm{e}^{k/2}\hat{c}(k)\cosh(p(\lambda)-1/2)k\right\}\Big|_{\lambda=0}\\
&=4\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \mathrm{e}^{k/2}\hat{c}(k)\cosh(p(0)-1/2)k\\
&=4\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \mathrm{e}^{k/2}\hat{c}(k)\cosh k/2\\
&=2\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \hat{c}(k)\left\{1+\mathrm{e}^{k}\right\}\\
&=2\left\{\int_0^\infty \mathrm{d}k\ \hat{c}(k)+\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}k\ \hat{p}(k)\right\}
\end{aligned}$$

与公式（11.4）得到的结论一致。

原则上，因为由已实现方差的矩母函数的显式表达式，我们知道到期日的伪概率分布，只要知道市场上的欧式期权价格，就可以计算出任何关于已实现方差的欧式合约的价格。不幸的是，并不是所有的波动率衍生品都像方差互换一样，存在可以复制它的一揽子期权组合。Friz和Gatheral（2005）指出，即使可以写出一个复制表达式，一揽子期权的权重也是无法确定的。

零相关性情况下的波动率价值

在分析完方差互换之后，下一个比较简单的例子是波动率互换。Friz 和Gatheral（2005）指出，在相关性为零的情况下：

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{\langle x\rangle_T}\right]=\sqrt{2\pi}\hat{c}(0)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{d}k\mathrm{e}^{k/2}I_1\left(\frac{k}{2}\right)\hat{c}(k) \qquad (11.11)$$

其中，I_1（·）代表修正的第一类贝塞尔函数。

我们已经熟悉了在值远期欧式期权的近似表达式：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\hat{c}(0) \approx \frac{\sigma_{BS}\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (11.12)$$

所以，对于在值期权应该有Delta函数的权重我们并不感到惊讶。

为了考查在值远期欧式期权的贡献到底有多重要，我们考虑一年期波动率曲线为直线的情况，σ_{BS}（k，1）=0.2，∀k。公式（11.11）的第一项约为 0.1997，以贝塞尔函数为权重的一揽子期权仅为0.0003，整个加起来为0.2，即波动率曲线为直线时（没有曲率调整）波动率的价值。

公式（11.11）最开始是通过直接积分算出来的。后来，关于推导权重Peter Friz提供了更具启发性的方法，该方法利用了结论：在波动率曲线为直线的情况下（Black-Scholes），即σ_{BS}（k）=σ ∀k，波动率互换的价值等于隐含波动率σ。

证明：

在波动率曲线为直线的情况下（不失一般性，我们假设τ=1），我们有：

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} F'(k/2) + \sqrt{2\pi}\delta(k) \right\} \mathrm{e}^{k/2} c_{BS}(k;\sigma) = \sigma \qquad (11.13)$$

对于某些F有F（0）=1。通过分部积分，我们发现：

$$\int_0^\infty \mathrm{d}k \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} F'(k/2) + \sqrt{2\pi}\delta(k) \right\} \mathrm{e}^{k/2} c_{BS}(k;\sigma)$$

$$= -\sqrt{2\pi} \left\{ \int_0^\infty \mathrm{d}k \; F(k/2) \frac{\partial}{\partial k} \left[\mathrm{e}^{k/2} c_{BS}(k;\sigma) \right] \right\}$$

然后，对公式（11.13）的两边做关于σ的积分，对任意σ，我们有：

$$-\sqrt{2\pi} \left\{ \int_0^\infty \mathrm{d}k F(k/2) \frac{\partial}{\partial k} \left[\mathrm{e}^{k/2} \frac{\partial}{\partial \sigma} c_{BS}(k;\sigma) \right] \right\} = 1 \qquad (11.14)$$

无论隐含波动率是什么，一揽子期权的Vega为1。

对Black-Scholes公式求导，回想起我们定义的c_{BS}（k；σ）：=exp（-k）C_{BS}（k，σ），有

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\frac{\partial}{\partial k}\left[\mathrm{e}^{k/2}\frac{\partial}{\partial\sigma}c_{BS}(k;\sigma)\right]=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{k}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{e}^{-\sigma 2/8}$$

令， v：=σ^2，将其代入公式（11.14）得：

$$\int_0^\infty \mathrm{d}kF(k/2)\frac{k}{v}\exp\left(-\frac{k^2}{2v}\right)=\mathrm{e}^{v/8}$$

现在，用k的整数幂表示F （k）：

$$F(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m k^n$$

对每一项进行积分，得：

$$\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\left(\frac{v}{2}\right)^{m/2}\left(\frac{m}{2}\right)!=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{v}{8}\right)^n\frac{1}{n!}$$

对比 v 的幂的系数，解出 α$_m$，得到：

$$F(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(k^2/4)^m}{(m!)^2}$$

我们将上述公式作为贝塞尔函数I$_0$（k）。最后，我们回想起公式（11.13）中一揽子期权的权重为F′ （k/2），且注意到：

$$I_1(k)=\partial_k I_0(k)$$

证明完毕。

复制波动率互换

虽然我们可以用一揽子期权的价值来表示波动率互换的价值（在相关性为零的情况下），但是波动率互换的复制策略与方差互换的复制策略完全不同。对于方差互换，我们在最开始的时候构建一揽子期权组合，后面只调整标的资产的头寸使其总价值保持在固定的额度即可。相反，对于波动率互换，我们需要连续维持在值期权的仓位：每天，我们卖出所有非在值期权的仓位，然后买入新的在值期权。与方差互换的复制策略不同，这个策略明显不实用——期权的买卖价差会给交易商带来较大的亏损。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

尽管零相关性的假设不切合实际，至少在股票市场是这样的，但Carr和Lee的结论依然很诱人。比如说，我们很想知道，欧式期权的价格（假设是已知的）对波动率衍生品价格的限制有多强。

简单的对数正态模型

假设$\log\left(\sqrt{\langle x\rangle_T}\right)$是均值为μ、方差为$s^2$的正态分布。则$\log\left(\langle x\rangle_T\right)$是均值为2μ、方差为$4s^2$的正态分布。波动率和方差互换的值分别为：

$$\mathbb{E}[\sqrt{\langle x\rangle_T}] = e^{\mu+s^2/2};\ \mathbb{E}[\langle x\rangle_T] = \mathrm{e}^{2\mu+2s^2}$$

求解μ和s^2得：

$$s^2 = 2\log\left(\frac{\sqrt{\mathbb{E}[\langle X\rangle_T]}}{\mathbb{E}\left[\sqrt{\langle X\rangle_T}\right]}\right);\ \mu = \log\left(\frac{\mathbb{E}\left[\sqrt{\langle X\rangle_T}\right]^2}{\sqrt{\mathbb{E}[\langle X\rangle_T]}}\right)$$

凸性调整为：

$$\sqrt{\mathbb{E}[\langle X\rangle_T]} - \mathbb{E}\left[\sqrt{\langle X\rangle_T}\right] = \left(\mathrm{e}^{s^2/2}-1\right)\mathbb{E}\left[\sqrt{\langle X\rangle_T}\right]$$

顺便说一句，简单的对数正态假设看起来很合理；如第8章所述，隐含波动率的经验分布函数看起来是对数正态的，波动率曲线倾斜的动态大体上与对数正态波动率动态一致。

所以，方差看涨期权的定价公式为Black-Scholes形式：

$$\mathbb{E}\left[\langle x\rangle_T - K\right]^+ = \mathrm{e}^{2\mu+2s^2}N(\tilde{d}_1) - KN(\tilde{d}_2) \qquad (11.15)$$

其中，

$$\tilde{d}_1 = \frac{-\frac{1}{2}\log K + \mu + 2s^2}{s}$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{-\frac{1}{2}\log K + \mu}{s}.$$

在这个简单的对数正态模型下，确定所有方差期权价值需要的全部信息为方差和波动率互换（等价于凸性调整后的方差互换价值）的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

价值。此外，至少对于主要的股票指数，方差互换市场的流动性很好，波动率互换市场的流动性较差。

Heston模型的例子

假设标的资产价格的真实动态服从BCC参数下的Heston模型（记得对数正态波动率是更加符合现实的假设），参数：

$$\lambda = 1.15\,,\quad \rho = 0\,,\quad \sigma_0^2 = \bar{\sigma}^2 = 0.04\,,\quad \eta = 0.39$$

我们在前面展示了如何在 Heston 模型下计算波动率互换的价值。在 Heston模型下我们也可以简单地计算出方差看涨期权的价值。给定方差和波动率互换的价值，我们可以用公式（11.15）计算方差看涨期权的价值。如果用简单的方差看涨期权公式误差有多大呢？

在图11.4中，我们对比了近似公式算出的方差看涨期权的价格和对已实现波动率的显式Heston特征函数进行直接数值积分算出的方差看涨期权价格。

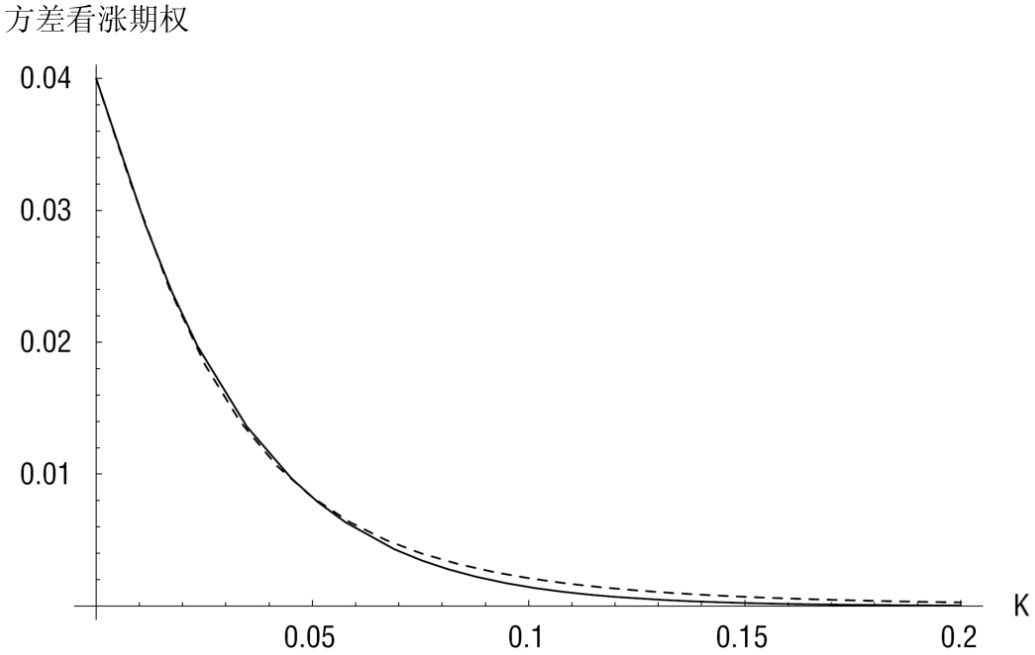


图11.4 BCC参数下，执行价为K 的一年期方差看涨期权的定价。实线是数值求解Heston模型得到的；虚线是由对数正态模型估计得到的

很明显，在执行价为零的情况下两个方法得到的价格相等，因为我们只有一个方差互换。我们不清楚在执行价不为零的情况下误差有多大。为了对误差有更好的理解，我们在图11.5中对比了通过对Heston特征函数数值求逆得到的概率密度，与用于近似的均值为2μ、方差为4s ^{2}对数正太密度函数。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

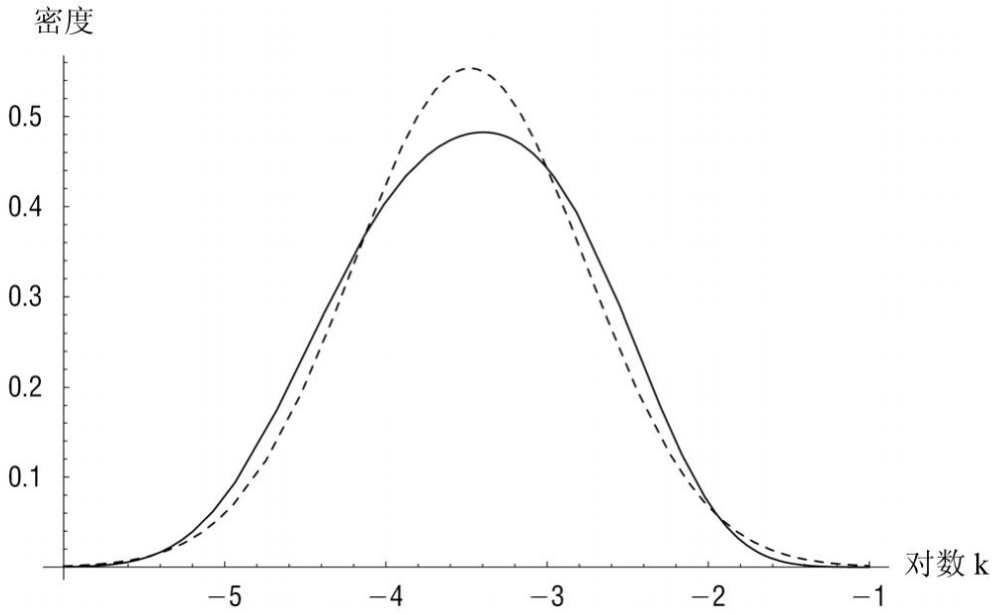


图11.5 BCC参数下，一年期二次变差的对数的概率密度函数。实线是数值求解Heston模型得到的；虚线是由对数正态模型估计得到的

我们可以看到吻合程度很高。如果在动态价格被认为不现实的Heston模型下吻合程度很高，在标的资产波动率的动态为对数正态的假设下会怎样？

我们之前得到结论，到期日为T的波动率衍生品的价格可以完全被到期日为T的欧式期权价格限制。为了使这个论据更明确，我们用随机波动率模型（比如说对数正态模型）拟合欧式期权价格，令相关性ρ为零（这不影响波动率衍生品的价格），用公式（11.11）计算波动率互换的价格、并应用对数正态方差看涨期权公式（11.15），对于某些特定的参数结果是稳健的。唯一的限制是，模型要很好地拟合到期日为T的欧式期权价格。

波动率期权：更多关于模型独立性的问题

到目前为止，我们讨论了给定所有欧式期权的价格，方差期权的价格是严格被限制的。但是，这个结论的正确程度，以及如何更清楚地阐述它并没有定论。

Bruno Dupire（2005）通过考虑一揽子欧式看涨期权的delta对冲过程，展示了如何推导出关于已实现波动率的看涨期权的、模型独立的下界。对冲过程是用已实现二次变差作为标准；每当二次变差的增量达到某一固定值时就对冲一次。与固定时间对冲的方法不同，假设不存在跳的情况下，如果已实现波动率低于隐含波动率（期权卖出时的隐含波动率），该对冲策略可以保证期权空头是盈利的。相反，如果已实现波动率高于期权卖出时的隐含波动率，该对冲组合是亏损

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

的。可以通过购买二次变差的期权锁定风险。最后，对冲者只剩下包含欧式齐全空头和已实现波动率多头的组合，且收益是正的。这个组合的价值至少是零，这个结论是模型独立的。从而，我们得到了方差期权的下界。Dupire在同一篇文章里阐述了欧式期权价格给定的情况下，Skorokhod 嵌入问题的解是如何生成方差期权的上界和下界的。

回到下界的问题，一种猜测是，方差期权的最小值可能是在局部波动率模型下得出的（模型参数通过拟合隐含波动率得出）。即使是在局部波动率模型下（波动率不是随机的）方差期权仍然有价值，因为已实现波动率依赖于股票价格从开始到到期日的路径。我们知道，瞬时方差的风险中性条件期望是局部方差，很明显，任何其他模型都会在局部波动率曲面的基础上产生更多的波动性。

在这些模型独立的上界和下界之间，假设方差期权的公允价值最接近随和波动率模型下得到的价值看似是合理的。我们整本书都在讲局部波动率模型动态假设的不合理性，所以拒绝用下界来代表公允价值是合理的。另一方面，价格上界可能代表了某些较为疯狂的波动率曲面动态。在实际中，波动率曲面的表现是比较稳定的。例如，Cont和 Fonseca（2002）对波动率曲面的时间序列进行主成分分析，发现几乎所有的方差都可以被三个波动因子所描述，我们称之为：波动率水平、波动率倾斜、波动率曲率。根据Cont和Fonseca的结论，标准普尔500指数波动率曲面的方差的94%都可以被第一个主成分解释，即波动率水平的变化（在我们的讨论范围中，即瞬时波动率的改变）。

Forde（2006）将Carr-Lee的结论推广到局部随机波动率模型下，模型形式为：

$$\mathrm{d}S = \sigma(S)\sqrt{v}\,\mathrm{d}Z$$

其中，σ（S）为S的确定函数（局部波动率函数），v是随机的，但是与Z独立。他展示了给定局部波动率函数σ（S）的情况下，如何通过考虑特定特征函数对应的合约的价格，从单一到期日对应的波动率曲线得到二次变差定律。在买卖价差较小的（例如，单一触碰期权）外汇市场，这些局部随机波动率模型已经取代随机波动率模型成为标准。像第9章中提到的一样，以股票为标的的单一触碰期权的买卖价差不够小，退一步讲，在随机波动率的基础上引入局部波动率也不嫌烦琐。除此之外，一般情况下，股票衍生品市场的在值波动率比外汇衍生品市场的在值波动率显著。在这一事实存在的基础上，结合对波动率曲面动态的经验观察，金融工程师在进行股票衍生品建模时，往往选择股价收益率与波动率的相关性不为零的模型，而不是局部波动率模型。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

11.4 基于二次变差的交易所交易衍生品

波动率指数

2004年，VIX（隐含波动率指数）指数期货在芝加哥期权交易所上市交易。最开始，VIX指数是为了模拟剩余到期日为一个月的标准普尔100指数（OEX）在值期权的隐含波动率而设计的。其数值通过计算八个期权的隐含波动率的平均值得出（离在值状态最近的、分布在在值状态两边的四个执行价格所对应的看涨、看跌期权）。为了促进 VIX 的相关交易，指数的计算方法发生了变化。下面是芝加哥期权交易所官网上问答部分的摘录：

“波动率指数 VIX 发生了哪些变化？改进后的波动率指数相对于最开始的波动率指数，有三点主要变化：（1）新版波动率指数是由一系列范围极广的执行价对应的期权计算而得的。旧版波动率指数的计算只采用了在值期权。（2）新版波动率指数采用了新的计算公式，直接用一揽子期权的加权价格计算期望波动率。旧版波动率指数要从期权定价模型中倒推出隐含波动率。（3）新版波动率指数采用了标准普尔500指数期权，标准普尔500指数是美国股票市场最主要的基准指数。旧版波动率指数是基于标准普尔100指数的。

芝加哥期权交易所为什么要改变波动率指数的算法？芝加哥期权交易所更改波动率指数的算法，是为了提供更精确、稳定的期望市场波动率度量方法，并创造可交易波动率产品的可行性标的指数。

新版波动率指数的计算方法反映了金融理论研究者、风险管理者和波动率交易员思考和交易波动率的方式。新版波动率指数的设计比旧版波动率指数更符合行业惯例。新版波动率指数的计算更简单，而且提供了更稳健的期望波动率度量方法。说它更稳健是因为，新版波动率使用的期权数据范围更广，包含了整个波动率曲线的信息，不像旧版波动率的计算只用到了在值期权的信息。说它更简单是因为，新版波动率直接用指数期权的加权价格计算出波动率的期望，不像旧版波动率涉及从期权定价模型中倒推出隐含波动率的过程。这些变化增加了波动率指数的吸引力。正如之前所述，新版波动率指数是由标准普尔500指数期权的价格计算而得的，标准普尔500指数是被广泛认可的美国股票市场基准指数，也是很多股票基金的参考指标，指数覆盖的资产超过8000亿美元。除此之外，标准普尔500指数是场外波动率交易中最常用的指数。这个强大的计算公式提供了用一揽子标准普尔500指数期权静态复制波动率指数的算法。这个事实是至关重要的，它提供了波动率衍生品对冲和套利的办法，奠定了发展基于波动率指数的

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

可交易产品的基础。芝加哥期权交易所在2003年第四季度就宣布计划推出波动率指数期货和期权，正等待监管部门的审核。这将是波动率衍生品家族中的最早的成员。”

这个解释是耐人寻味的。为了看明白芝加哥期权交易所的意思，考虑芝加哥期权交易所2003年发布的白皮书中对波动率指数的定义（转换为我们的符号）：

$$VIX^2 = \frac{2}{T}\sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q_i(K_i) - \frac{1}{T}\left[\frac{F}{K_0} - 1\right]^2 \qquad (11.16)$$

其中，Q_i是执行价格为K_i的虚值期权的价格，K_0是小于F的所有执行价中最大的一个。

我们意识到，波动率公式（11.16）是公式（11.4）的直接离散化，这就解释了芝加哥期权交易所更换波动率指数算法的原因，因为新的算法保证了复制波动率指数的可行性。

为了进行更清楚的分析，我们由方差的定价公式（11.4）开始。我们用执行价格替代对数执行价格，重写公式。注意到，在芝加哥期权交易所2003年发布的白皮书中，K_0的定义是小于F的所有执行价中最大的执行价：

$$\begin{aligned}
\frac{VIX^2 T}{2} &= \int_0^F \frac{dK}{K^2} P(K) + \int_F^\infty \frac{dK}{K^2} C(K) \\
&= \int_0^{K_0} \frac{dK}{K^2} P(K) + \int_{K_0}^\infty \frac{dK}{K^2} C(K) + \int_{K_0}^F \frac{dK}{K^2} (P(K) - C(K)) \\
&= \int_0^\infty \frac{dK}{K^2} Q(K) + \int_{K_0}^F \frac{dK}{K^2} (K - F) \\
&\approx \int_0^\infty \frac{dK}{K^2} Q(K) + \frac{1}{K_0^2} \int_{K_0}^F dK (K - F) \\
&= \int_0^\infty \frac{dK}{K^2} Q(K) - \frac{1}{K_0^2} \frac{(K_0 - F)^2}{2}
\end{aligned}$$

最后的式子的一个可能的离散化是：

$$VIX^2 = \frac{2}{T}\sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q_i(K_i) - \frac{1}{T}\left[\frac{F}{K_0} - 1\right]^2$$

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

与波动率指数的规定计算公式（11.16）是一样的。

VXB指数期货

VXB指数期货的成交量可以忽略不计（VXB指数是10倍VIX指数）。例如，2004年12月8日，12月到期的VXB指数期货平均每天的成交量为155张合约。当时在价格是 132.30 美元，所以每天的成交量大概为200 万美元。相反，2004年12月到期的标准普尔500指数期货的日交易量大概为5万张合约，相当于每天150亿美元的成交量。

根据公式（11.4）给出的期望方差与一揽子期权的关系，结算日被定在第三个星期五之前的星期三，结算价是由下月到期的期权的开盘价计算出的，第三个星期五是标准普尔500指数期权的结算日。

微妙之处

VXB指数期货是根据复制期权组合价值的平方根结算的（即根据波动率而不是方差），所以必须要有一个凸性调整。然而，这与我们之前计算过的凸性调整又不完全相同，如下：

$$\sqrt{\mathbb{E}[W_T]} - \mathbb{E}\sqrt{[W_T]}$$

在估值日，VXB指数期货合约的凸性调整为：

$$\sqrt{\mathbb{E}[W_{t,T}]} - \mathbb{E}\left[\sqrt{\mathbb{E}_t[W_{t,T}]}\right]$$

其中，t是结算日，T是一揽子期权的到期日，并且期望是在t之前的某个定价日计算的。

与之前一样，我们可以由到期日为t和T的一揽子期权价格简单地计算出$E[W_{t,T}]$，但是需要建模来计算$\mathbb{E}\left[\sqrt{\mathbb{E}_t[W_{t,T}]}\right]$。

一个明显的问题是，凸性调整的市场价值是多少。在2004年12月8日，VXB的点位为132.30。我们通过用市场价格计算期望远期方差$E[W_{t,T}]$得到凸性调整，结果展示在表11.1中。

表11.1 2004年12月8日，VXB指数的经验凸性调整

到期日	VXB 价格	Fwd 方差	凸性调整
Spot	132.30	132.30	0.00
Jan-05	144.20	149.09	4.89
Feb-05	153.30	159.63	6.33

下一个问题是，VXB指数期货的理论价值是多少。

VXB指数在Heston模型下的凸性调整

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

为了在Heston模型下计算VXB指数的凸性调整，我们首先注意到，给定瞬时方差 v_t ，一月期期望整体方差 $W_{t,T}$ 为：

$$f(v)=\mathbb{E}[W_{t,T}]=(v-\bar{v})\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda}+\bar{v}\tau$$

其中， $\tau=T-t$ 。

随后，我们有：

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{W_{t,T}}\right]=\int_0^\infty q(v\mid v_0)\sqrt{f(v)}\,dv \qquad (11.17)$$

其中，$q(v\mid v_0)$ 是给定初始方差 v_0 的情况下，瞬时方差 v 的概率密度函数。

通过拟合2004年12月8日的数据得到Heston模型的参数，然后用数值方法计算出公式（11.17）中的积分，我们得到了凸性调整关于剩余到期日的函数图，见图11.6。

我们观察到，对于表11.1给出的两个到期日对应的期货，Heston模型下的凸性调整分别为7.4和8.6个点，与实际中观察到的数字差不多。

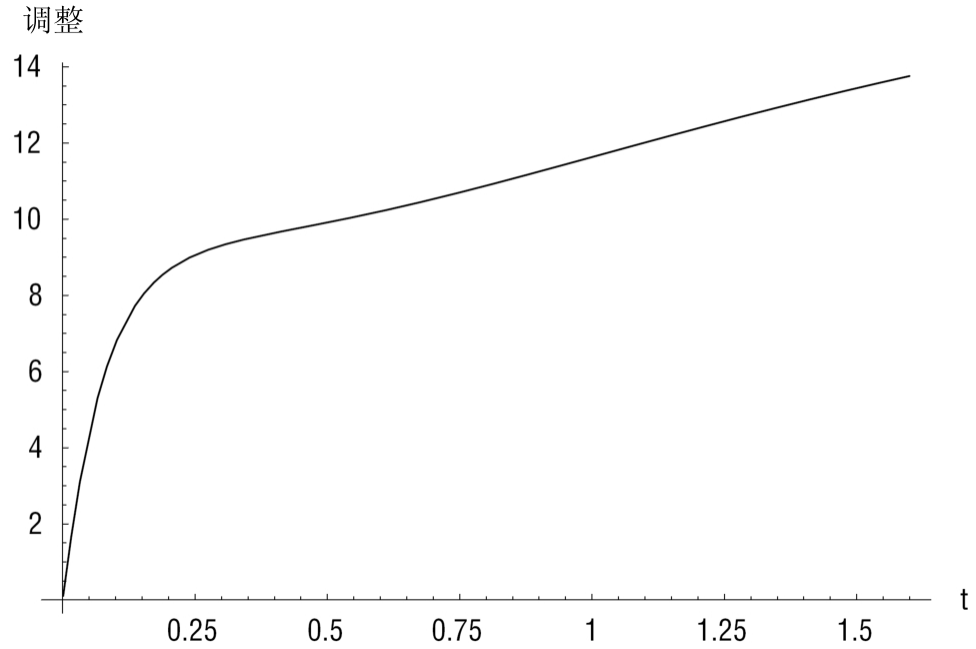


图11.6 Heston模型下，年化的VXB指数凸性调整关于t的函数，模型参数通过拟合2004年12月8日的市场数据而得

Dupire计算VXB指数期货价值的方法

大体来说，在到期日 T_1 ，VXB指数期货的收益为：

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

$$\mathbb{E}_{T1}[\sqrt{\langle x\rangle_{T_1,T_2}}] =: Y$$

其中，$\langle x\rangle_{T_1,T_2} = \langle x\rangle_{T_2} - \langle x\rangle_{T_1}$。另外，根据定义，

$$\mathbb{E}_t[Y]^2 = \mathbb{E}_t[Y^2] - \mathrm{Var}_t[Y]$$

Dupire（2005）中提到，凸性调整恰好由 VXB 指数期货的方差给出。因为 VXB指数期货在市场上是有交易的，方差Var_t [Y]可以由期货价格的历史时间序列估计出。

VIX指数期货的公允价值由下式给出，

$$\mathbb{E}_t[Y] = \sqrt{\mathbb{E}_t[Y^2] - \mathrm{Var}_t[Y]}$$

优点

按照正常的标准，VXB指数期货不算非常成功，但是它们的存在为缩小场外衍生品市场的买卖价差贡献了重要力量。现在，到期时间从6个月到5年的标准普尔500指数方差互换的买卖价差仅为波动率点数的0.5倍。单只股票方差互换的报价也很活跃，在写这本书时，对于美国股票市场前 50 的股票，买卖价差在2.5倍波动率左右。

全国最低交易手续费免费办理国内正规商品股指原油期货开户 零佣金 不限资金量和交易量直接申请交易所手续费
任何地方费用比我们低 10倍赔偿差价 客服QQ/微信:958218088 期货开户和书籍下载请进:https://www.7help.net

11.5 总结

波动率衍生品是相对近期推出的产品，却已经被广泛地交易。因为从实践的角度来讲，它们的估值过程可以被很好地理解。虽然标准方差互换的定价过程中假设标的资产动态服从分散过程，实际中存在的幅度合理的跳对估值的影响并不大。虽然方差期权的价格与欧式期权的价格关联只有一部分，但是从实际定价的角度讲，却是很清晰的。当然，从理论角度讲，波动率衍生品定价和标的资产动态过程的关系还有很多内容需要研究。

---

[1]这个简洁的证明来自于Chiyan Luo。